

Impedanzen in der Elektrotechnik

Darstellung mit komplexen Zahlen

14. DEZEMBER 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Ein bisschen Zahlentheorie am Anfang	2
1.1	Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen	2
1.2	Komplexe Zahlen	4
2	Rechnen mit komplexen Zahlen	5
2.1	Koordinatenschreibweise	5
2.2	Euler'sche Schreibweise	6
3	Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik	8
3.1	Impedanz	8
3.2	Admittanz	9
4	Komplexe Zahlen im Smith-Diagramm	9
4.1	Anwendung: Admittanz (Y) aus Impedanz (Z) bestimmen	11
4.2	Anwendung: Anpassung einer Last Z mithilfe eines L-Netzwerkes	13
4.3	Anpassung mit 3 Elementen	16
4.4	Anpassung mit Speiseleitung und Kondensator	19
4.5	Zusammenhang mit der Güte	20

1 Ein bisschen Zahlentheorie am Anfang

Die Mathematik von heute wurde nicht an einem Tag erfunden, sie hat sich über Jahrtausende entwickelt. Ähnlich wie sich das Zahlenverständnis eines Kleinkindes nach und nach entwickelt, so hat sich auch die Mathematik selbst in der Menschheit entwickelt.

Grundlegende Elemente in der Mathematik sind Zahlen. Sämtliche Zahlen kann man in Gruppen einteilen, jede neue Gruppe enthält die bereits vorherigen. Aber der Reihe nach.

1.1 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

Zählt man die Anzahl der Menschen in einem Raum, so wird man (hoffentlich) schwerlich halbe, drittel oder gar noch kleinere Menschenanteile finden, sondern entweder ist der Raum menschenleer oder es sind ganzzahlige Vielfache der Zahl 1 an Anzahl Menschen vorhanden. Diese Menge der (An-)Zahlen nennt man *natürliche Zahlen*. Diese wird mit dem Zeichen $\mathbb{N}$ dargestellt. Die erste Erweiterung dieser Zahlenmenge kann man tun, indem man auch die 0 als natürliche Zahl dazunimmt. Um darzustellen, dass die 0 dazugehört, schreibt man $\mathbb{N}_0$.

Die nächste Erweiterung fügt auch negative ganze Zahlen hinzu. Diese erweiterte Menge nennt man dann *ganze Zahlen* und werden mit dem Zeichen $\mathbb{Z}$ dargestellt. **Es gilt: jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.**

Vorhin hatten wir es von Anzahlen von Menschen. Zählen wir die Anzahl Äpfel in einer Schale, dann könnte es sein, dass neben verschiedenen ganzen Äpfel zusätzlich noch ein halber Apfel drin liegt, weil jemand einen Apfel geteilt und nur die eine Hälfte gegessen hat. Um das darzustellen, reicht die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einschliesslich der Null nicht mehr, wir müssen auch diese Menge erweitern.

Wir erweitern die Menge der Zahlen so, dass sie auch Bruchzahlen enthält. Wir nennen diese erweiterte Zahlenmenge *rationalen Zahlen*, welche durch das Zeichen $\mathbb{Q}$ dargestellt werden. Brüche sind Zahlen, bei denen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Mathematisch schreibt man das so:

$$q = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$$

Es gilt: Jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl.

Stellt man eine rationale Zahl als Dezimalzahl (also nur mit Ziffern und Dezimaltrennzeichen) dar, dann ist die Anzahl der Ziffern rechts vom Dezimaltrennzeichen entweder endlich (z.B. 2.25) oder unendlich, aber *periodisch* (z.B. $\frac{1}{3} = 0.33333 \dots$ was als $0.\overline{3}$ dargestellt wird — oder $\frac{1}{7} = 0.142835\overline{7}$).

Damit ist die Zahlenmenge schon recht gross, aber Zahlen wie π oder $\sqrt{2}$ finden wir darin nicht; die Anzahl der Ziffern rechts vom Dezimaltrennzeichen ist bei π oder $\sqrt{2}$ zwar unendlich gross, aber eben *nicht periodisch*. Die Römer haben statt mit π mit dem Wert $\frac{22}{7}$ gerechnet, aber es gibt bessere Näherungen, wie zum Beispiel die rationale Zahl $\frac{355}{113}$. Aber auch letztere ist eben nicht π .

Wir müssen die Zahlenmenge abermals erweitern um all jene Zahlen, die nicht als Bruch von zwei ganzen Zahlen dargestellt werden können. Diese Zahlen nennt man *irrationale Zahlen* und werden mit dem Zeichen $\mathbb{I}$ dargestellt.

Bisher haben wir unsere Mengen immer so erweitert, dass die neue Menge die vorherigen enthielt; irrationale Zahlen sind aber Zahlen, die zu den bisherigen dazukommen.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Aber auch die erweiterte Zahlenmenge hat einen Namen: Es sind die *reellen Zahlen*, und ihre Menge wird mit dem Zeichen $\mathbb{R}$ gekennzeichnet.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Es gilt: Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.

Und ab jetzt können wir schreiben:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Um die Zahlen grafisch darzustellen, bietet sich eine Zahlengerade an.

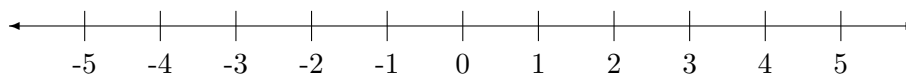


Abbildung 1: Zahlengerade, nur ganze Zahlen eingezeichnet

Jede Zahl, die sich auf der Zahlengerade links von einer anderen Zahl r befindet, ist kleiner als r . So ist 5.5 kleiner als 5.6, -5.6 kleiner als -5.5 usw. Jede Zahl auf der Zahlengerade wird durch einen (unendlich kleinen) Punkt dargestellt; die Zahlengerade besteht aus unendlich vielen Punkten ...

1.2 Komplexe Zahlen

Und dann kam jemand¹ auf die Idee, die Zahlengerade in **reale Zahlengerade** umzubenennen und zusätzlich zu dieser realen Zahlengerade noch eine sogenannte **imaginäre Zahlengerade** zu addieren; beide Achsen schneiden sich bei null und stehen senkrecht aufeinander:

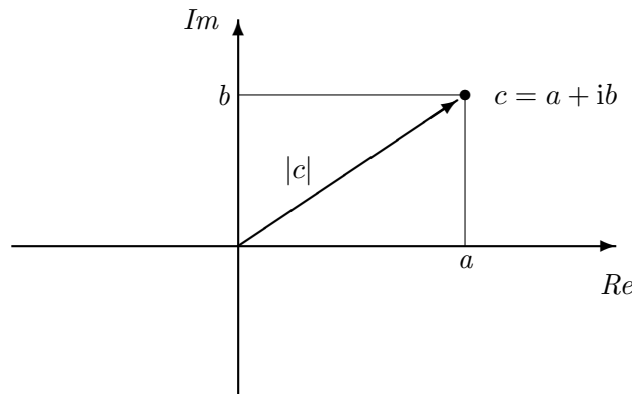


Abbildung 2: komplexe Zahlenebene

Die reale Zahlengerade enthält nur rein reelle Zahlen, die imaginäre Zahlengerade enthält nur rein imaginäre Zahlen; imaginäre Zahlen sind reelle Zahlen, die mit einer noch zu definierenden imaginären Einheit i multipliziert werden. Ein Punkt in der komplexen Zahlenebene lässt sich als Summe

$$c = a + i \cdot b$$

beschreiben. Liegt der Punkt auf der realen Achse, dann hat b den Wert 0. Liegt er auf der imaginären Achse, dann hat a den Wert null. All diese Punkte in der komplexen Zahlenebene repräsentieren ein Element (also eine Zahl) der *komplexen Zahlen*; die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. **Es gilt: Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl.**

Wir haben unsere Zahlenmenge nun ein weiteres Mal erweitert und können nun schreiben:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

¹Der Begriff „komplexe Zahlen“ wurde von Carl Friedrich Gauß, *30.04.1777 in Braunschweig – †23.02.1855 in Göttingen, eingeführt. Der Ursprung der Theorie über komplexe Zahlen geht auf die beiden Mathematiker Gerolamo Cardano (Ars magna, Nürnberg 1545) und Rafael Bombelli (L'Algebra, Bologna 1572; wahrscheinlich zwischen 1557 und 1560 geschrieben) zurück. Und auch Leonard Euler, *15.04.1707 in Basel – †18.09.1783 in St. Petersburg hat mit seiner speziellen Schreibweise komplexer Zahlen dazu beigetragen.

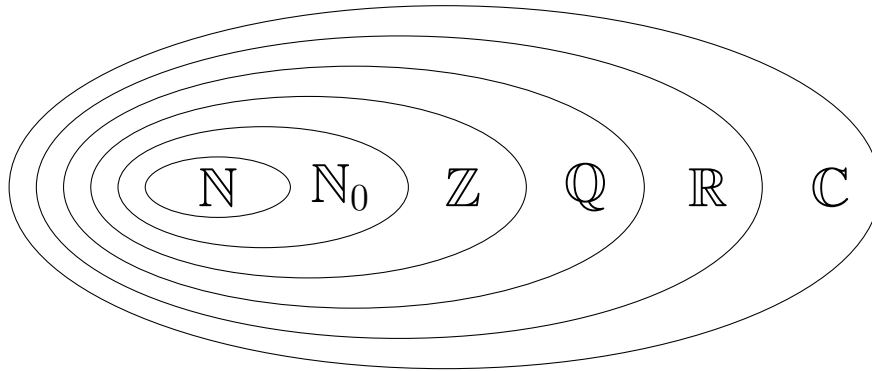


Abbildung 3: grafische Darstellung der Zahlenmengen

Generell gilt, dass der Betrag einer Zahl der Abstand zum Ursprung des Koordinatensystems ist, der Ursprung des Koordinatensystems ist dort, wo sich die beiden Achsen schneiden. Somit ist die 5 genauso weit vom Ursprung entfernt wie die -5 , aber auch wie $5 \cdot i$ oder $-5 \cdot i$. Statt $5 \cdot i$ oder $i \cdot 5$ kann man auch einfach $5i$ schreiben.

Der Betrag einer beliebigen komplexen Zahl kann folgendermassen berechnet werden:

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Das bedeutet, die Zahl $3 + 4i$ hat den Betrag

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Bei der Berechnung des Betrags einer komplexen Zahl kommt der *Satz des Pythagoras* zum Tragen.

2 Rechnen mit komplexen Zahlen

2.1 Koordinatenschreibweise

Will man zwei komplexe Zahlen addieren so muss man einfach die reellen Anteile beider Zahlen und die imaginären Anteile beider Zahlen addieren:

$$c_1 = a_1 + ib_1, c_2 = a_2 + ib_2$$

$$c_1 + c_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = a_1 + a_2 + ib_1 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Oder mit einem Zahlenbeispiel:

$$(3 + 4i) + (5 - 2i) = 8 + 2i$$

An dieser Stelle sei die Bemerkung erlaubt, dass man komplexe Zahlen auch wie Vektoren ansehen kann.

Subtrahieren funktioniert entsprechend. Schwieriger wird es allerdings beim Multiplizieren, Dividieren und Potenzieren . . .

2.2 Euler'sche Schreibweise

Eine komplexe Zahl $c = a + ib$ kann einerseits in der Koordinatenschreibweise dargestellt werden, es wäre aber auch denkbar, eine komplexe Zahl als Vektor zu verstehen und sie so mit der Vektorlänge und dem Winkel zur reellen Achse darzustellen, also $c = f(|c|, \varphi)$.

Tatsächlich gibt es eine solche Schreibweise, aber sie sieht zunächst etwas merkwürdig aus:

$$c = |c| \cdot e^{i\varphi}$$

Die Gültigkeit dieser Schreibweise, die auf Leonard Euler zurückgeht, zu erklären, würde einen weiteren Nachmittag füllen, sodass ich hier einfach darum bitte, sie so zu akzeptieren. Üblicherweise wird der Winkel nicht in Grad angegeben, sondern in Radiant².

Das e in der Formel ist die Euler'sche Konstante und hat den Wert 2.718282. . . Die Euler'sche Konstante e ist eine irrationale Zahl (also Element von $\mathbb{I}$), i ist die imaginäre Einheit, von der wir immer noch nicht wissen, was sie ist — aber wir kommen noch dazu.

$$c = a + ib = |c| \cdot e^{i\varphi}$$

Die Umrechnung von Koordinatenschreibweise zur Euler'schen Schreibweise ist sehr einfach. Den Betrag haben wir ja schon an früherer Stelle bestimmt:

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Den Winkel bestimmen wir mit der trigonometrischen Formel

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Umgekehrt kann man auch a und b aus $|c|$ und φ berechnen:

$$a = |c| \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = |c| \cdot \sin(\varphi)$$

²90° entsprechen $\frac{\pi}{2}$, 180° entsprechen π , . . .

Mit der Euler'schen Schreibweise ist es nämlich sehr einfach zu multiplizieren, zu dividieren und zu potenzieren, wie anhand einiger Beispiele gezeigt werden soll.

Nehmen wir mal die beiden reellen Zahlen 3 und -2 ; diese wollen wir multiplizieren. Jede reelle Zahl ist ja auch eine komplexe Zahl, und das machen wir uns jetzt mal zu Nutze, indem wir von den beiden Zahlen den Betrag und den Winkel bestimmen und sie in der Euler'schen Schreibweise notieren. Der Pfeil von 0 auf die 3 hat mit der reellen Achse einen Winkel von 0° und die Länge 3, der Pfeil von der 0 auf die -2 hat mit der reellen Achse einen Winkel von 180° (in Radiant ausgedrückt ist das π) und die Länge 2. In der Euler'schen Schreibweise sieht das dann so aus:

$$3 = 3 \cdot e^{i \cdot 0}, -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$$

Möchte ich nun diese beiden Zahlen multiplizieren, dann erhalte ich:

$$3 \cdot (-2) = (3 \cdot e^{i \cdot 0}) \cdot (2 \cdot e^{i \cdot \pi})$$

Das kann man auch ohne Klammern schreiben und anders anordnen:

$$3 \cdot (-2) = 3 \cdot 2 \cdot e^{i \cdot 0} \cdot e^{i \cdot \pi}$$

Interessant ist, was jetzt mit den beiden Exponenten passiert: Gemäss Potenzengesetzen addieren sich die Exponenten ja bekanntermassen. Wir erhalten also:

$$3 \cdot (-2) = 6 \cdot e^{i \cdot 0 + i \cdot \pi} = 6 \cdot e^{i \cdot (0 + \pi)} = 6 \cdot e^{i \cdot \pi} = -6$$

Was passiert, wenn man zwei negative Zahlen auf diese Weise multipliziert? Multiplizieren wir -3 mit -2 :

$$(-3) \cdot (-2) = (3 \cdot e^{i \cdot \pi}) \cdot (2 \cdot e^{i \cdot \pi}) = 6 \cdot e^{i \cdot 2\pi} = 6 \cdot e^{i \cdot 0} = 6$$

Beim Dividieren muss man den Betrag des Dividenden durch den Betrag des Divisors teilen, die Winkel muss man voneinander abziehen.

Aber schauen wir uns noch das Potenzieren an. Berechnen wir das Quadrat von -1 :

$$(-1)^2 = 1^2 \cdot (e^{i \cdot \pi})^2$$

Gemäss Potenzgesetzen muss beim Quadrieren der Exponent $i \cdot \varphi$ mit dem Exponenten 2 multipliziert werden. Man erhält also:

$$(-1)^2 = 1^2 \cdot (e^{i \cdot \pi})^2 = 1 \cdot (e^{i \cdot 2 \cdot \pi})$$

Und das ist wieder

$$1 \cdot (e^{i \cdot 2 \cdot \pi}) = 1 \cdot (e^{i \cdot 0}) = 1$$

Das Wurzelziehen ist auch eine Form des Potenzierens, denn es gilt:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Berechnen wir doch einmal die Wurzel von -1 :

$$-1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$$

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = (1 \cdot e^{i \cdot \pi})^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} \cdot (e^{i \cdot \pi})^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Jetzt ist die Frage, welche Zahl mit $1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ dargestellt wird. Der Betrag der Zahl ist 1, der Winkel φ ist $\frac{\pi}{2}$, also 90° . **Die Wurzel von -1 ist also die imaginäre Einheit!**

Noch eine kleine mathematische Spielerei am Ende dieses Kapitels, was aber für die weitere Betrachtung noch wichtig ist: Was ergibt eigentlich $\frac{1}{i}$?

$$\frac{1}{i} = \frac{-i \cdot i}{i} = \frac{-i \cdot \cancel{i}}{\cancel{i}} = -i$$

3 Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik

Ab sofort nennen wir die imaginäre Einheit nicht mehr i , sondern j . Der Grund ist, dass mit i in der Elektrotechnik veränderlicher Strom (z.B. Wechselstrom) bezeichnet wird: $i(t)$, und man so Verwechslungen ausschliessen möchte.

3.1 Impedanz

In der Elektrotechnik bezeichnet man mit *Impedanz* (Scheinwiderstand) die vektorielle Summe aus *Resistanz* (ohmscher Widerstand) und *Reaktanz* (Blindwiderstand). Und wir erinnern uns, dass die Blindwiderstände senkrecht zum ohmschen Widerstand stehen. Es liegt also nahe, eine Impedanz als komplexe Zahl zu betrachten mit einem realen Teil, dem ohmschen Widerstand und einem imaginären Teil als Blindwiderstand.

Man könnte also schreiben:

$$Z = R + X_L + X_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}, \text{ mit } \omega = 2\pi f$$

Und spätestens jetzt weiss man, warum der Pfeil für X_L nach oben, aber der Pfeil für X_C nach unten geht ...

3.2 Admittanz

Die *Admittanz* (Scheinleitwert) ist die vektorielle Summe der *Konduktanz* (Wirkleitwert) und der *Suszeptanz* (Blindleitwert). Und auch hier stehen Suszeptanz und Konduktanz senkrecht aufeinander. Es gilt

$$Y = G + B_L + B_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C, \text{ mit } \omega = 2\pi f$$

4 Komplexe Zahlen im Smith-Diagramm

Das Smith-Diagramm (englisch *Smith chart*) ist ein grafisches Hilfsmittel der komplexen Wechselstromrechnung, mit dem Berechnungen von elektrischen Impedanzen auf eine geometrische Konstruktion zurückgeführt werden können. Es wurde erstmals im Jahre 1939 von Phillip Smith³ vorgestellt.

Das ursprüngliche Ziel des Smith-Diagramms, die komplexen numerischen Berechnungen, die manuell getätigt werden mussten, durch eine grafische Ermittlung der Werte zu ersetzen und so zu vereinfachen, ist durch die breite Verfügbarkeit von Taschenrechnern, welche auch mit komplexen Zahlen rechnen können, und Computern mit entsprechenden Softwarepaketen weggefallen. Geblieben ist als primäre Anwendung die **grafische Repräsentation von Impedanzverläufen** in technischen Dokumenten und Datenblättern. Smith-Diagramme auf Papier zur grafischen Ermittlung werden daher primär im Bereich der Ausbildung und Lehre und zur Dokumentation verwendet. Messgeräte wie Netzwerkanalysatoren können gemessene Daten meist auch in Form von Smith-Diagrammen direkt anzeigen.

³Phillip Hagar Smith (*29. April 1905 in Lexington, Massachusetts, USA; †29. August 1987 in Berkeley Heights, New Jersey, USA) war ein US-amerikanischer Ingenieur. Er wurde mit der Erfindung des nach ihm benannten Smith-Diagrammes bekannt, einem System zur grafischen Darstellung von Berechnungen in der komplexen Wechselstromrechnung. Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Phillip_Smith

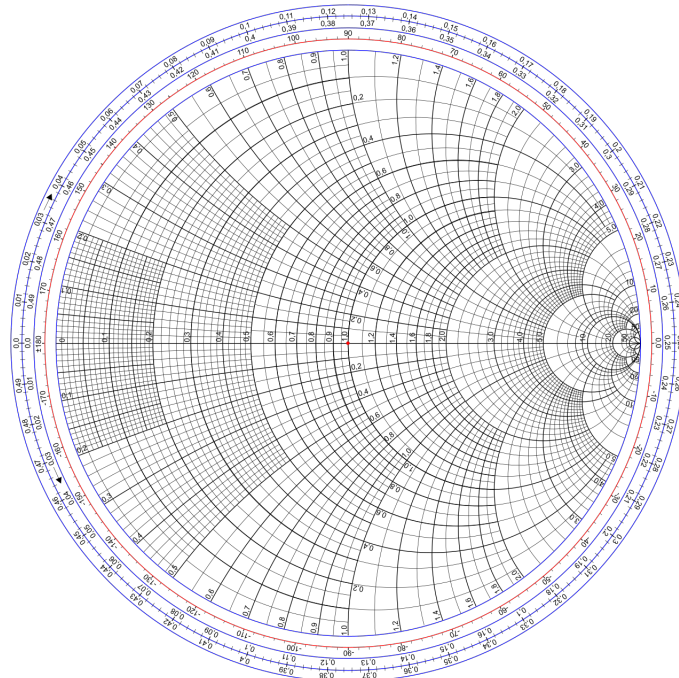


Abbildung 4: Smith Chart

Das Smith Chart muss man sich so vorstellen, dass man die rechte komplexe Zahlenebene, also von der reellen Achse von 0 bis ∞ und von der imaginären Achse von $-\infty i$ bis $+\infty i$ derart „verbogen“ dargestellt hat, dass sie einen Kreis bildet. Dabei ist die 0 ganz links, die Zahlen ∞ , $-\infty i$ und $+\infty i$ befinden sich alle auf einem Punkt ganz rechts. Zusätzlich sind die kreisförmige Skala aussen sowie die reelle Achse horizontal in der Mitte logarithmisch. Im Zentrum des Kreises befindet sich die Eins.

Unsere Koaxkabel, der Senderausgang und (hoffentlich) der Antenneneingang haben im Amateurfunk eine Impedanz von etwa 50Ω . Teilt man alle Impedanzen durch diese 50Ω , dann hat man alle Werte auf 50Ω normiert, und die 50Ω selbst werden als 1 dargestellt und befinden sich genau in der Mitte des Smith-Charts.

Noch ein paar Bilder zur Verdeutlichung:

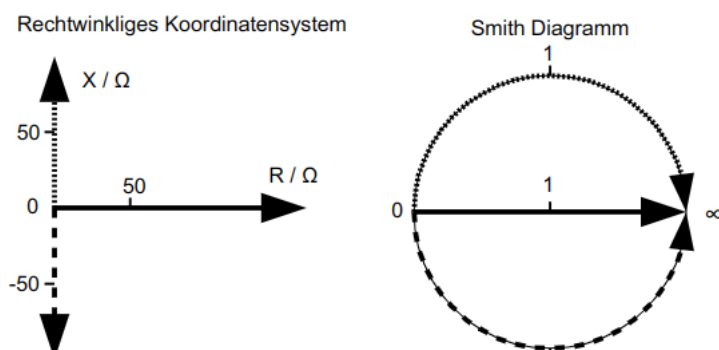
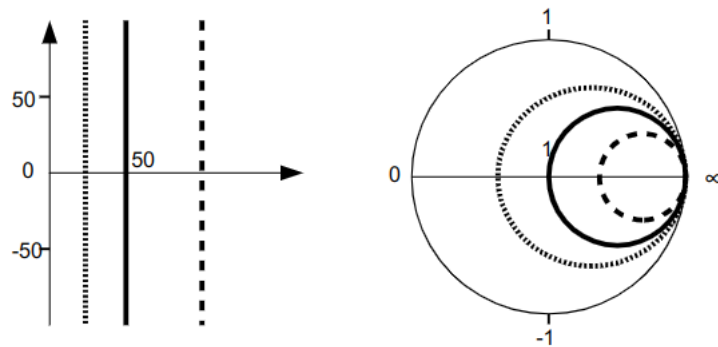
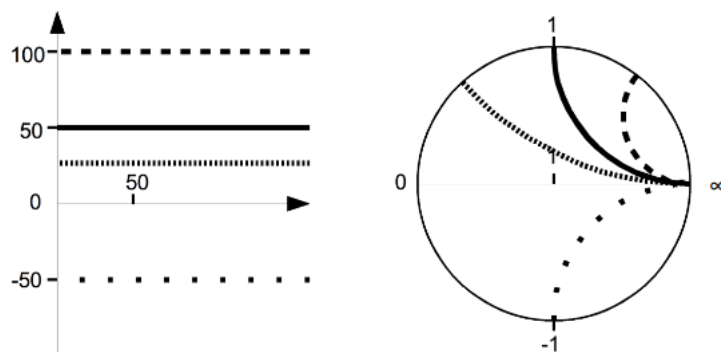


Abbildung 5: rechtwinkliges Koordinatensystem vs. Smith-Chart

Abbildung 6: diverse Impedanzen mit konstantem R Abbildung 7: diverse Impedanzen mit konstantem X

4.1 Anwendung: Admittanz (Y) aus Impedanz (Z) bestimmen

Von jedem Widerstand kann statt dem Widerstandswert (Resistanz) auch der Leitwert (Konduktanz) angegeben werden. Und so kann auch von jeder Impedanz die entsprechende Admittanz angegeben werden, sie muss aber – wie der Leitwert – ausgerechnet werden. Nehmen wir an, wir hätten eine Impedanz von $Z = 50 \Omega + j \cdot 50 \Omega$ und möchten diesen Wert in als Admittanz angeben. Rein mathematisch müsste man folgendermassen vorgehen:

$$Z = 50 \Omega + j \cdot 50 \Omega = 50 \Omega \cdot (1 + j)$$

Normiert ist das:

$$Z_{\text{norm}} = \frac{Z}{50 \Omega} = 1 + j$$

Daraus ergibt sich

$$Y_{\text{norm}} = \frac{1}{1 + j} = \frac{1 - j}{(1 + j) \cdot (1 - j)} = \frac{1 - j}{2} = \frac{1}{2} - j \cdot \frac{1}{2}$$

Um es zu „entnormieren“, muss mit 0.2 S multipliziert werden, was dann

$$Y = 100 \text{ mS} + j \cdot 100 \text{ mS}$$

ergibt.

Wenn man nun beachtet, dass das Smith-Chart bezogen auf die Impedanzen auf 50Ω und bezogen auf die Admittanzen auf 20 mS normiert ist, dann würde man das obige Z beim Punkt $(1 + j)$ und das obige Y beim Punkt $(0.5 - 0.5j)$ eintragen. Man sieht, dass der Punkt $(0.5 - 0.5j)$ vom Mittelpunkt genau so weit entfernt liegt wie der Punkt $(1 + j)$, und man sieht weiterhin, dass alle drei Punkte auf einer Geraden liegen.

Das gilt für alle Impedanzen, dass sie nämlich durch Spiegelung am Mittelpunkt in die Admittanz „umgerechnet“ werden können.

Nun wird das Smith Chart um die Admittanzlinien erweitert, die nichts anderes sind, als eine am Mittelpunkt punktgespiegelte Impedanzlinien:

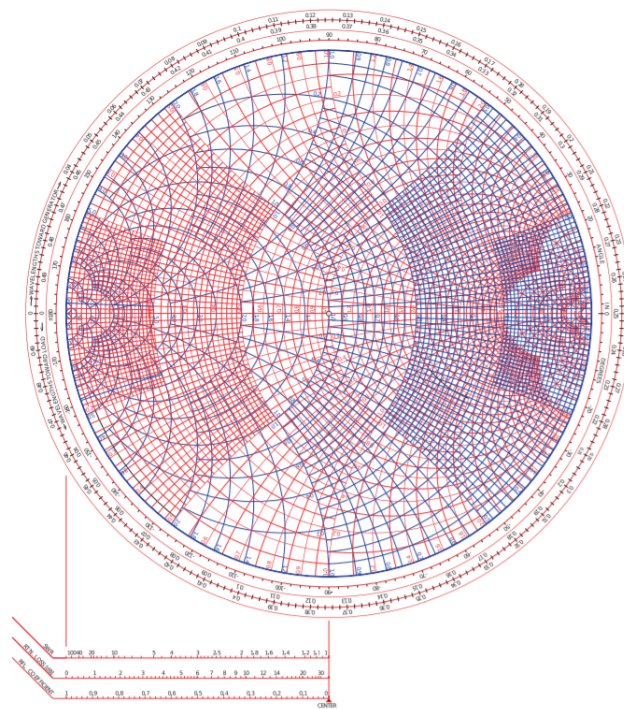


Abbildung 8: Smith Chart mit Impedanz- und Admittanzlinien

4.2 Anwendung: Anpassung einer Last Z mithilfe eines L-Netzwerkes

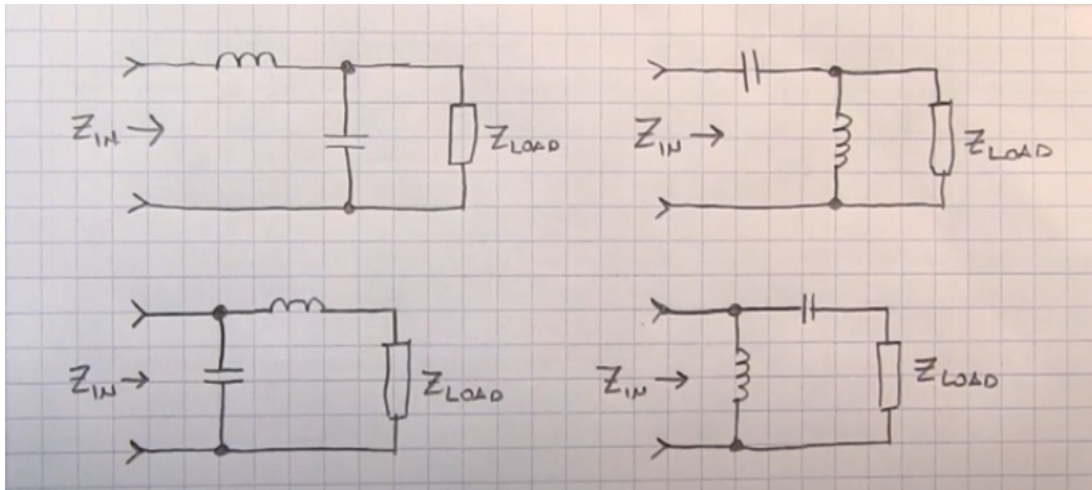


Abbildung 9: verschiedene L-Netzwerke aus L und C

Betrachten wir folgendes Beispiel:

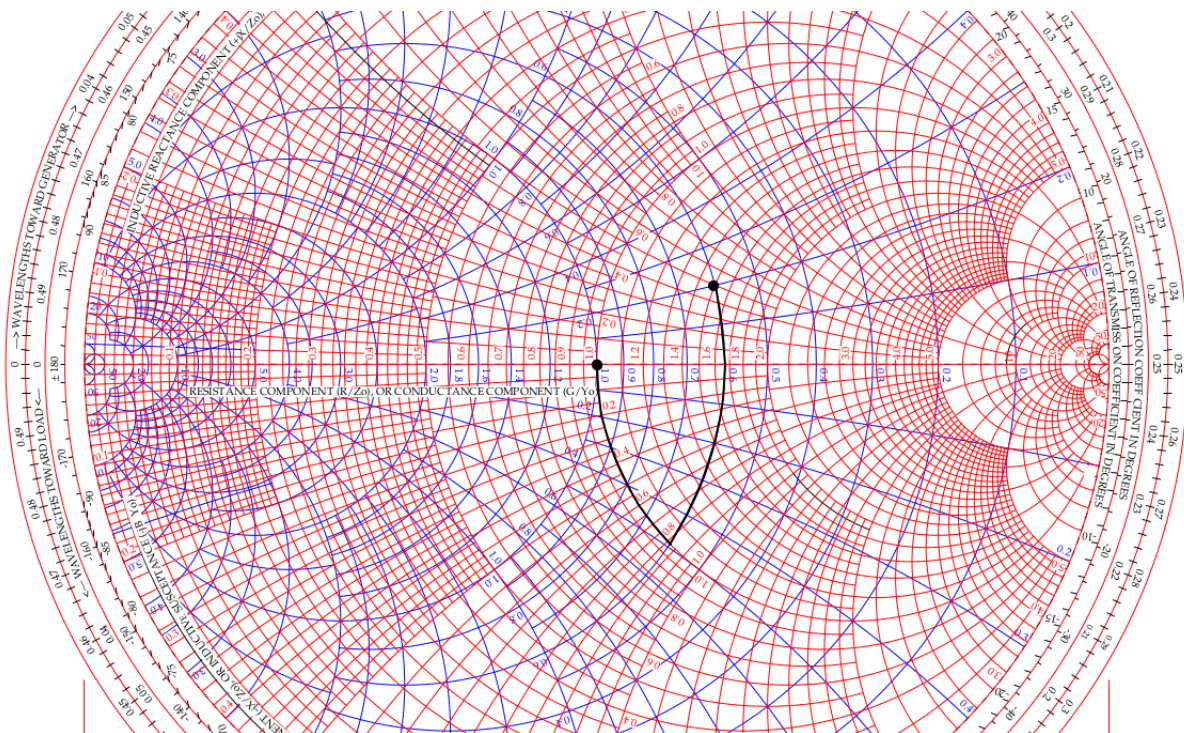


Abbildung 10: Anpassung einer (komplexen) Impedanz

Die Impedanz Z einer Antenne betrage $Z = (80 + j \cdot 40) \Omega$. Man zeichnet diese Impedanz bei $1.6 + j \cdot 0.8$ im Smith-Chart ein, das entspricht einer Normierung auf 50Ω . Möchte man diese Impedanz an seinen Sender anpassen, dann muss man sich auf den roten und blauen Linien einen Weg suchen, um von $1.6 + j \cdot 0.8$ zum Mittelpunkt des Smith-Charts ($1 + j \cdot 0$) zu gelangen.

Ein Weg könnte sein, entlang der blauen Linien nach unten zu gehen, bis man auf den roten Kreis gelangt, der durch den Mittelpunkt geht, und dann entlang der roten wieder nach oben. Für die Interpretation der Wege gelten folgende Regeln:

- Rote Linien stehen für Impedanz, also Reihenschaltung.
- Blaue Linien stehen für Admittanz, also Parallelschaltung.
- Weg nach oben bedeutet Spule.
- Weg nach unten bedeutet Kondensator.

Der erste Teilweg läuft an den blauen Linien entlang nach unten und ist etwa 0.68 lang. Das entspricht einer Parallelschaltung eines Kondensators mit

$$|B_C| = \Delta B \cdot 20 \text{ mS} = 0.68 \cdot 20 \text{ mS} = 13.6 \text{ mS}$$

Mit der Formel $|B_C| = \omega C$ mit $\omega = 2\pi f$ kann man die Kapazität für eine gegebene Frequenz berechnen.

Der zweite Teilweg läuft an den roten Linien entlang nach oben und ist etwa 0.82 lang. Das entspricht einer Reihenschaltung einer Spule mit

$$|X_L| = 0.82 \cdot 50 \Omega = 41 \Omega$$

Mit der Formel $|X_L| = \omega L$ mit $\omega = 2\pi f$ kann man die Induktivität für eine gegebene Frequenz berechnen.

Hier noch der Versuch eines Nachweises, dass die „Berechnung“ mithilfe des Smith-Charts stimmt:

	real	imaginär		Betrag	Winkel
Z_{ant}	80.00000	25.00000	►	83.81527	0.30288
				▼	▼
Y_{ant}	0.01139	-0.00356	◄	0.01193	-0.30288
Y_C	0.00000	0.01360			
	▼	▼			
Y_{ant+C}	0.01139	0.01004	►	0.01518	0.72264
				▼	▼
Z_{ant+C}	49.40272	-43.56085	◄	65.86483	-0.72264
X_L	0.00000	41.00000			
Z_{ges}	49.40272	-2.56085	►	49.46905	-0.05179

Abbildung 11: numerischer Nachweis der Korrektheit

Ein L-Netzwerk besteht aus zwei Komponenten, entweder L und C oder L und L oder C und C. Mit Hilfe des Smith-Charters kann man erkennen, dass nicht jede beliebige Impedanz mit jeder L-Schaltung angepasst werden kann, wie hier ersichtlich ist:

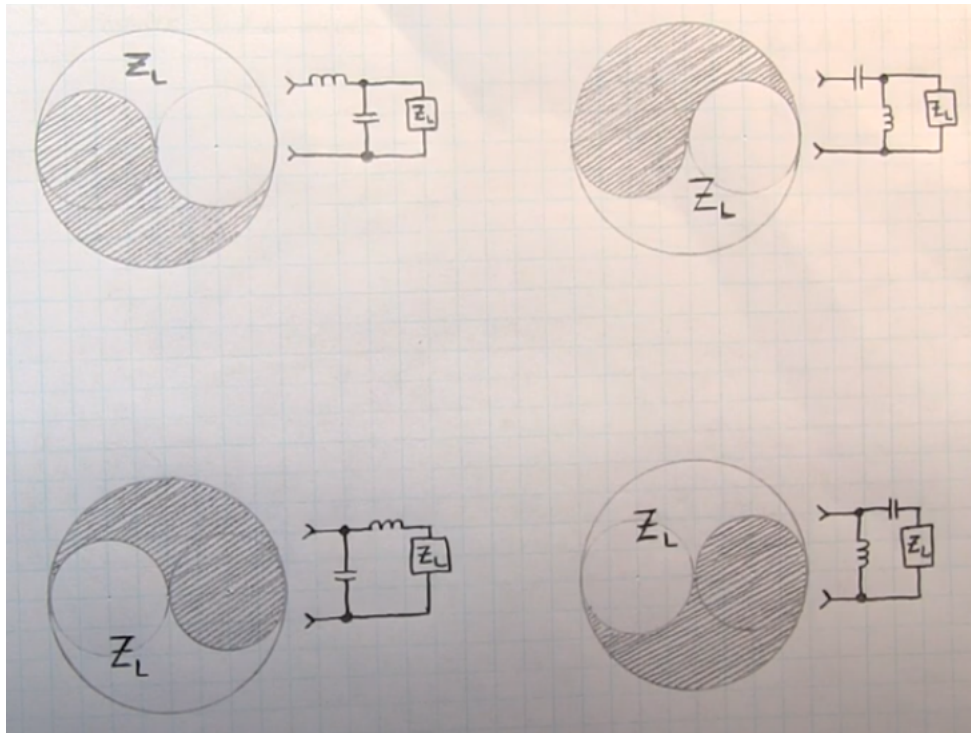


Abbildung 12: Bereiche, die mit den gegebenen Schaltungen angepasst werden können

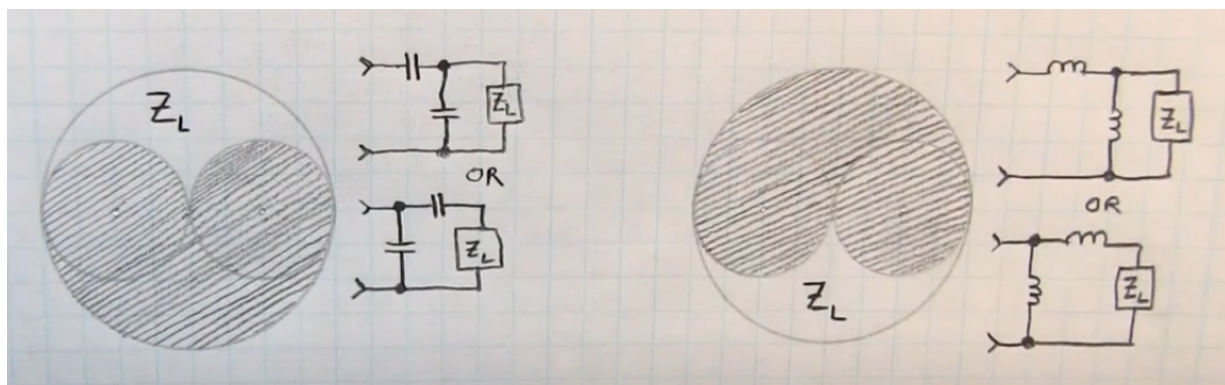


Abbildung 13: weitere Bereiche, die mit den gegebenen Schaltungen angepasst werden können

4.3 Anpassung mit 3 Elementen

Hier sind drei Schaltungen mit jeweils drei Elementen. Im jeweiligen Smith-Chart sind drei Teilwege zu gehen:

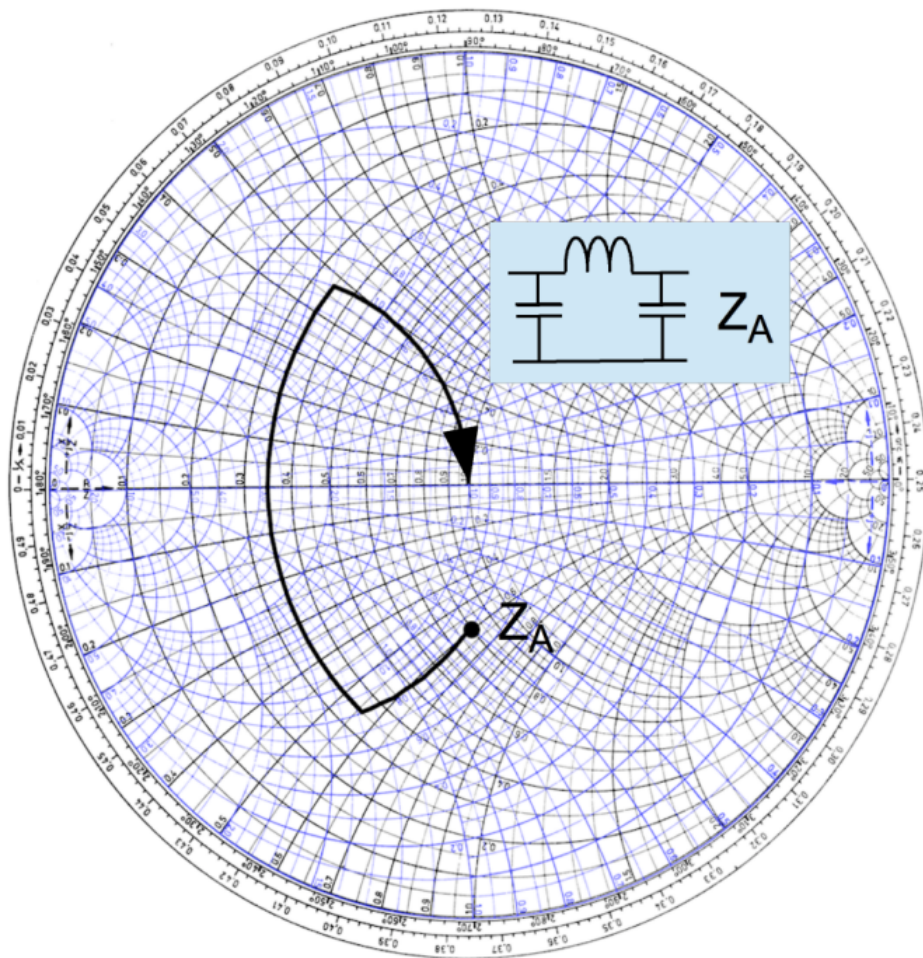


Abbildung 14: Pi-Filter mit 2 Kondensatoren und 1 Spule

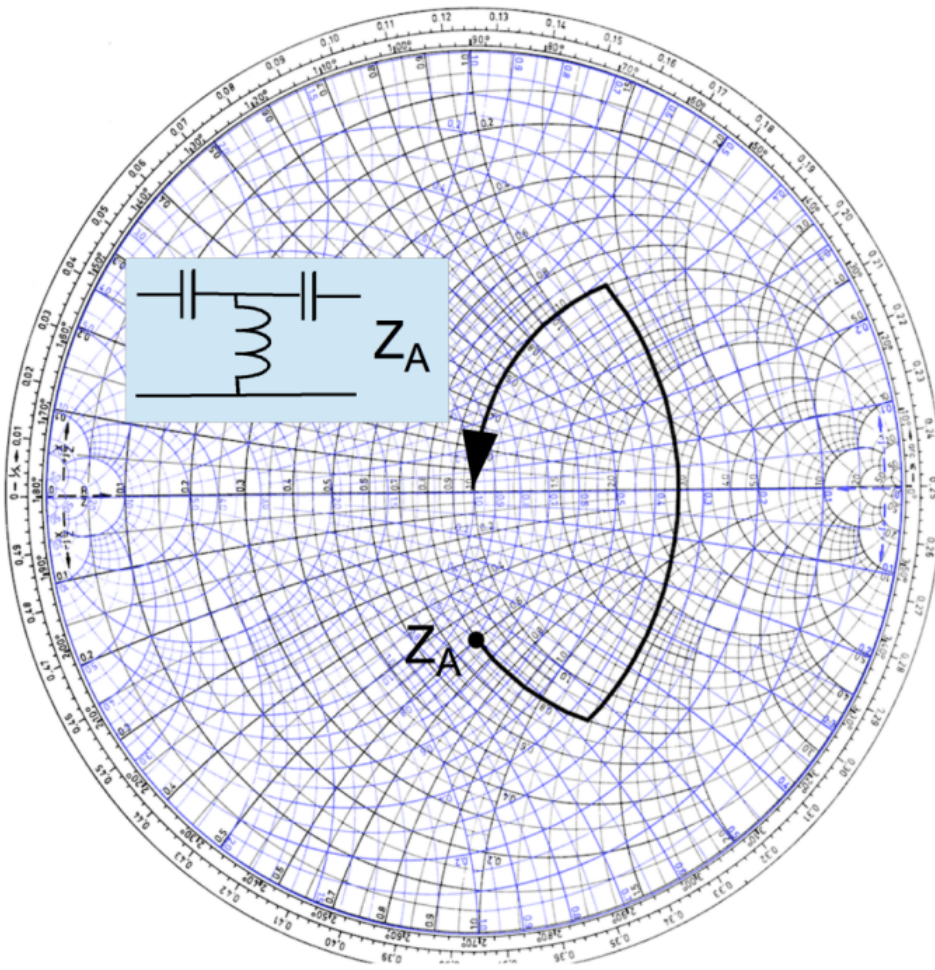


Abbildung 15: T-Filter mit 2 Kondensatoren und 1 Spule

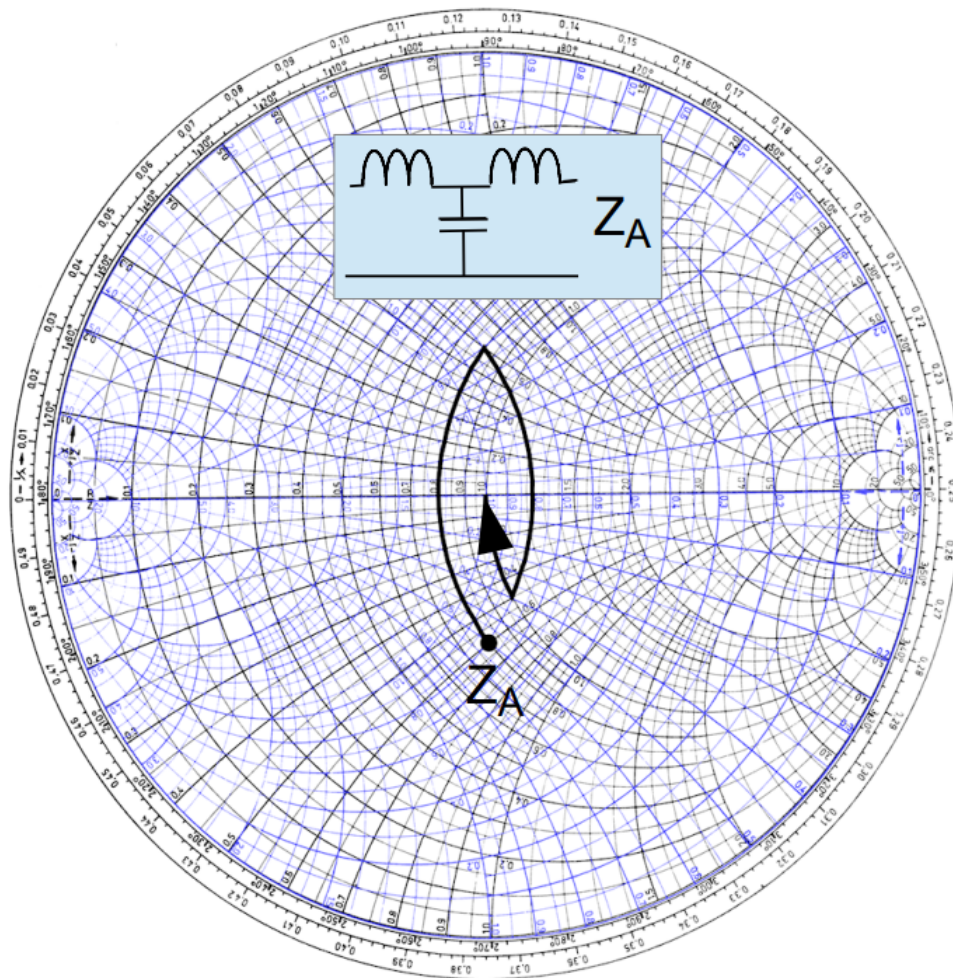


Abbildung 16: T-Filter mit 2 Spulen und 1 Kondensator

4.4 Anpassung mit Speiseleitung und Kondensator

In diesem Beispiel wird gezeigt, wie eine Anpassung mithilfe der Länge einer Speiseleitung angepasst werden kann:

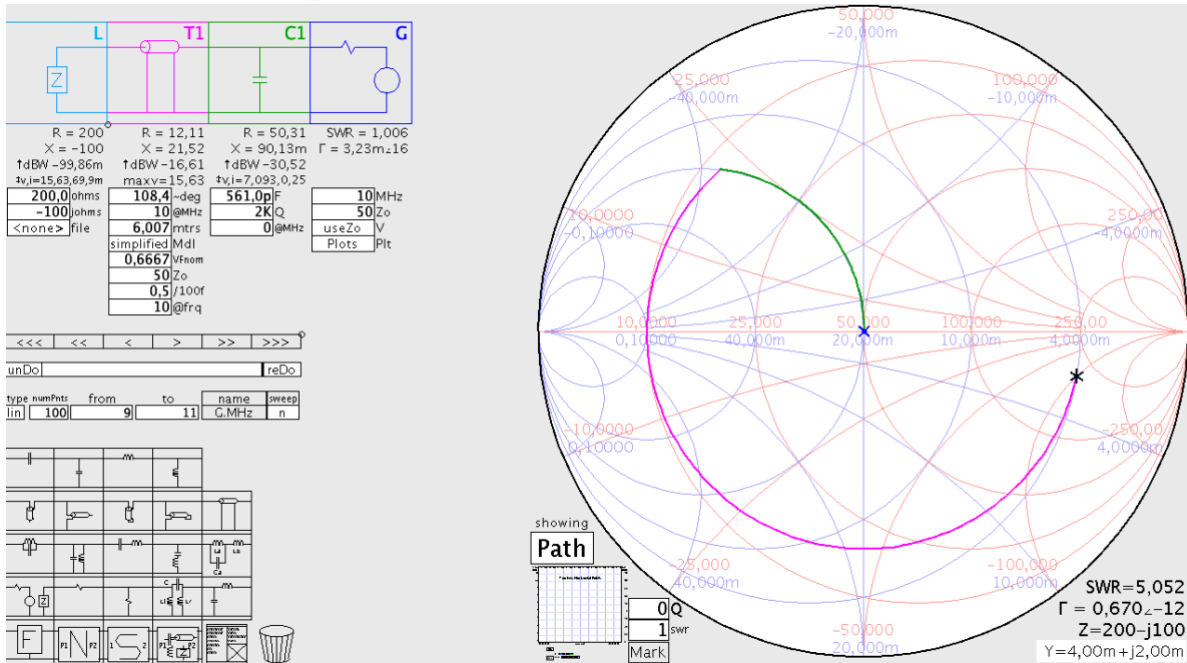


Abbildung 17: Anpassung mit Speiseleitung und Kondensator

Die Länge der Speiseleitung verschiebt die anzupassende Impedanz (oder Admittanz) um einen Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Smith-Charts identisch ist. Entlang eines solchen Kreises ist das VSWR im übrigen überall gleich.

4.5 Zusammenhang mit der Güte

Je grösser die Blindwiderstände im Verhältnis zu den Wirkwiderständen ist, desto grösser ist die Frequenzabhängigkeit – und damit die Schmalbandigkeit. Hier als „Linse“ dargestellt ist $Q = \frac{|X|}{R} = 1$.

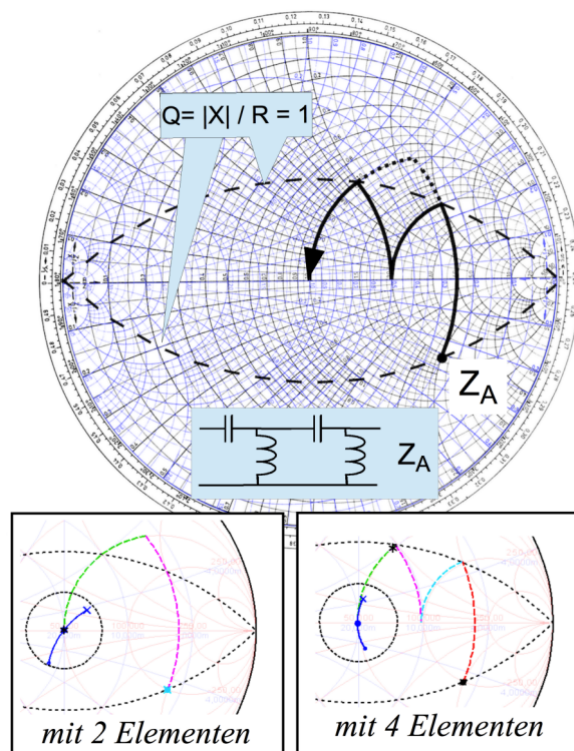


Abbildung 18: Zusammenhang mit der Güte

Je dünner die „Linse“, desto breitbandiger ist die Anpassungsschaltung. Im hier gezeigten Beispiel ist die Schaltung mit 4 Elementen breitbandiger als diejenige mit 2 Elementen.

Abbildungsverzeichnis

1	Zahlengerade, nur ganze Zahlen eingezeichnet	3
2	komplexe Zahlenebene	4
3	grafische Darstellung der Zahlenmengen	5
4	Smith Chart	10
5	rechtwinkliges Koordinatensystem vs. Smith-Chart	10
6	diverse Impedanzen mit konstantem R	11
7	diverse Impedanzen mit konstantem X	11
8	Smith Chart mit Impedanz- und Admittanzlinien	12
9	verschiedene L-Netzwerke aus L und C	13
10	Anpassung einer (komplexen) Impedanz	13
11	numerischer Nachweis der Korrektheit	14
12	Bereiche, die mit den gegebenen Schaltungen angepasst werden können	15
13	weitere Bereiche, die mit den gegebenen Schaltungen angepasst werden können	15
14	Pi-Filter mit 2 Kondensatoren und 1 Spule	16
15	T-Filter mit 2 Kondensatoren und 1 Spule	17
16	T-Filter mit 2 Spulen und 1 Kondensator	18
17	Anpassung mit Speiseleitung und Kondensator	19
18	Zusammenhang mit der Güte	20

Quellen:

1. Das Smith Diagramm und seine Anwendung bei der Anpassung von Impedanzen, Autor: Wolfgang Kurth, DD0CN, Dokument 2017 CC BY-NC-SA
2. <https://www.youtube.com/watch?v=IgeRHDI-ukc>
3. <https://de.wikipedia.org>