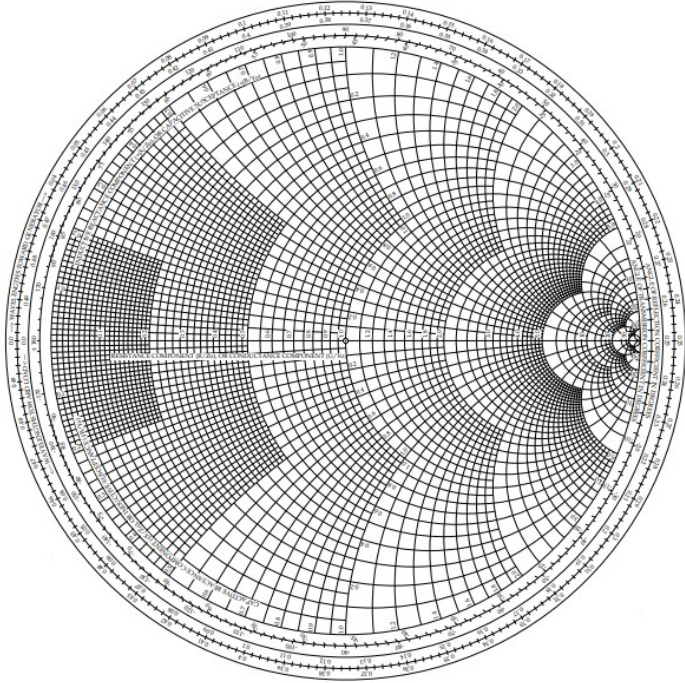


komplexe Zahlen in der Elektrotechnik



$$Z = R + jX$$

$$Y = G + jB$$

Teil 1

Zahlentheorie



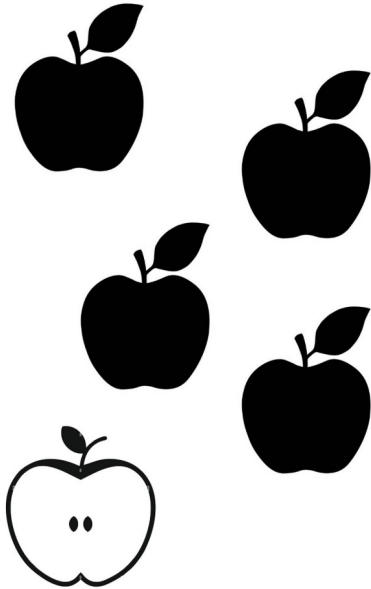
Anzahl der Personen in einem Raum:

natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}_0$

Höhe eines Turms / Tiefe eines Brunnens:

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ ■

Zahlentheorie



Anzahl der Äpfel in einer Schüssel:

rationale Zahlen



Rationale Zahlen können als Bruch dargestellt werden, wobei sowohl der Zähler als auch der Nenner ganze Zahlen sind.

Als Dezimalzahl sind sie entweder endlich lang oder unendlich lang aber periodisch. ■

Zahlentheorie

e

π

$\sqrt{2}$

Spezielle Zahlen in der Mathematik:

irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

Irrationale Zahlen können nicht als Bruch dargestellt werden.

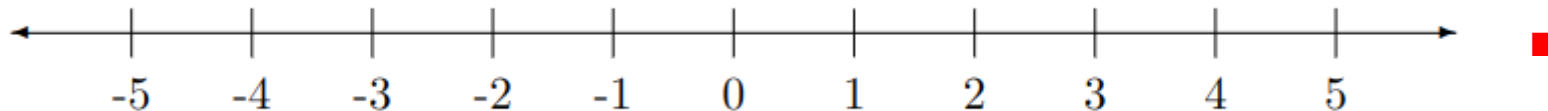
Als Dezimalzahl sind sie unendlich lang und nicht periodisch. ■

Zahlentheorie

Die Summe (Vereinigungsmenge) aus rationalen und irrationalen Zahlen nennt man

reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Reelle Zahlen können auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden.

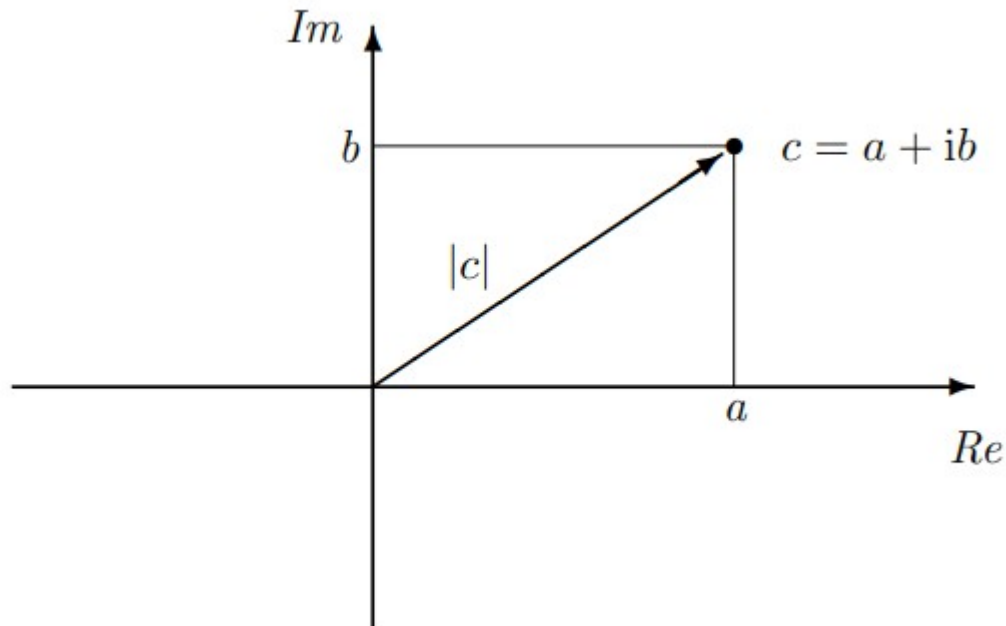


Zahlentheorie

Und dann kam jemand auf die Idee, zwei Zahlenstrahlen aufeinander senkrecht darzustellen, sodass man eine Zahlenebene bekommt.

Die horizontale Achse enthält alle reellen Zahlen.

Die vertikale Achse enthält auch alle reelle Zahlen, die mit einer *imaginären Einheit* i multipliziert werden.



Jeder Punkt der Zahlenebene kann durch Summe von zwei Zahlen dargestellt werden:
Die eine Zahl stammt von der horizontalen Achse und wird *Realteil* genannt.
Die andere Zahl stammt von der vertikalen Achse und wird *Imaginärteil* genannt. ■

Zahlentheorie

Die Zahlen dieser Zahlenebene nennt man

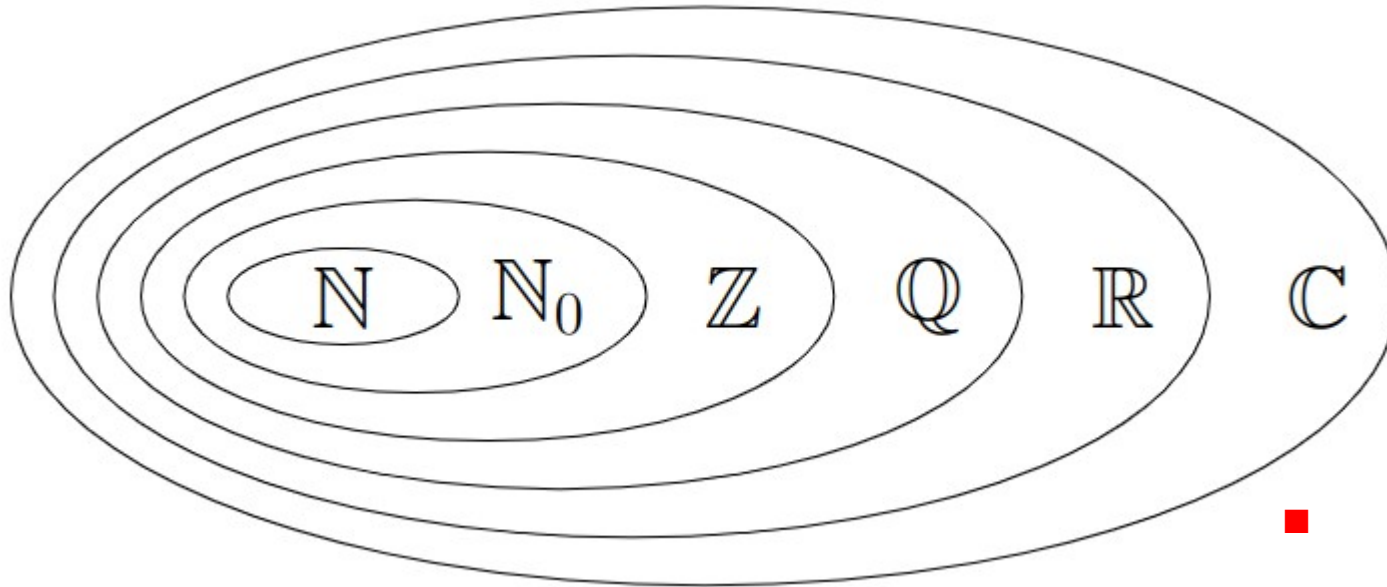
komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

Eine komplexe Zahl wird geschrieben als

$$c = a + ib \blacksquare$$

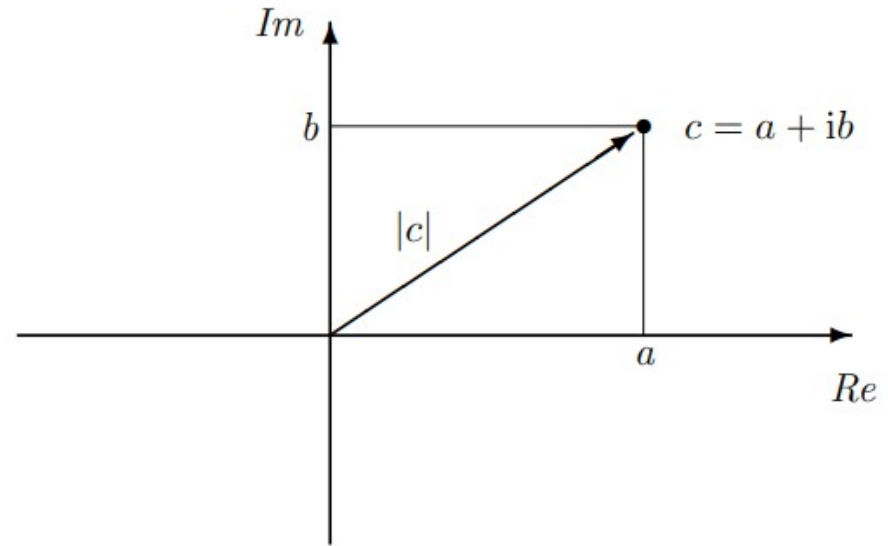
Zahlentheorie

Übersicht über die verschiedenen Zahlenmengen:



Rechnen mit komplexen Zahlen 1

Der Betrag einer Zahl ist immer die Entfernung zur Null.
Das ist auch bei den komplexen Zahlen so.



$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \blacksquare$$

Rechnen mit komplexen Zahlen 2

Addition / Subtraktion:

Will man zwei komplexe Zahlen addieren oder subtrahieren so muss man einfach die reellen Anteile beider Zahlen und die imaginären Anteile beider Zahlen addieren / subtrahieren:

$$(3 + 4i) + (5 - 2i) = 8 + 2i \quad \color{red}{\blacksquare}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen 3

Multiplikation / Division:

Will man zwei komplexe Zahlen multiplizieren oder dividieren so ist es nicht mehr ganz so einfach.

Es gibt aber eine andere Darstellung einer komplexen Zahl, nämlich mit Betrag und Winkel:

$$c = a + ib = |c| \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Diese Schreibweise zu erklären würde einen weiteren Nachmittag füllen ... ■

Rechnen mit komplexen Zahlen 4

Wie man den **Betrag** ausrechnet, haben wir bereits gesehen (Satz des Pythagoras).

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Den **Winkel** berechnet man folgendermassen:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



Rechnen mit komplexen Zahlen 5

Ausserdem gilt:

$$a = |c| \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = |c| \cdot \sin(\varphi)$$

Mit diesem Wissen (also mit diesen 4 Formeln) kann man leicht von der einen in die andere Schreibweise umrechnen. ■

Rechnen mit komplexen Zahlen 6

$$3 = 3 \cdot e^{i \cdot 0} \qquad -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$$

$$3 \cdot (-2) = (3 \cdot e^{i \cdot 0}) \cdot (2 \cdot e^{i \cdot \pi})$$

$$3 \cdot (-2) = 3 \cdot 2 \cdot e^{i \cdot 0} \cdot e^{i \cdot \pi} \quad \blacksquare$$

Rechnen mit komplexen Zahlen 7

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-2) &= 6 \cdot e^{i \cdot 0 + i \cdot \pi} = \\ &= 6 \cdot e^{i \cdot (0 + \pi)} = 6 \cdot e^{i \cdot \pi} = -6 \end{aligned}$$



Rechnen mit komplexen Zahlen 8

$$\begin{aligned}(-3) \cdot (-2) &= (3 \cdot e^{i \cdot \pi}) \cdot (2 \cdot e^{i \cdot \pi}) \\&= 6 \cdot e^{i \cdot 2\pi} = 6 \cdot e^{i \cdot 0} = 6 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen 9

$$\begin{aligned} (-1)^2 &= 1^2 \cdot (e^{i \cdot \pi})^2 = 1 \cdot (e^{i \cdot 2 \cdot \pi}) \\ &= 1 \cdot (e^{i \cdot 0}) = 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen 10

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$$

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = (1 \cdot e^{i \cdot \pi})^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1^{\frac{1}{2}} \cdot (e^{i \cdot \pi})^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Die Wurzel von -1 ist also die imaginäre Einheit! ■

Rechnen mit komplexen Zahlen 11

Was ist eigentlich der Kehrwert von i ?

$$\frac{1}{i} = \frac{-i \cdot i}{i} = \frac{-i \cdot \cancel{i}}{\cancel{i}} = -i \quad \color{red}{\blacksquare}$$

Teil 2

Impedanz als komplexe Zahl

Ab jetzt nennen wir die imaginäre Einheit j und nicht mehr i , weil $i(t)$ der veränderliche Strom über die Zeit ist und es so schnell zu Verwechslungen führen kann.

Eine Impedanz kann als komplexe Zahl dargestellt werden:

$$Z = R + X_L + X_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$
$$\omega = 2\pi f \quad \blacksquare$$

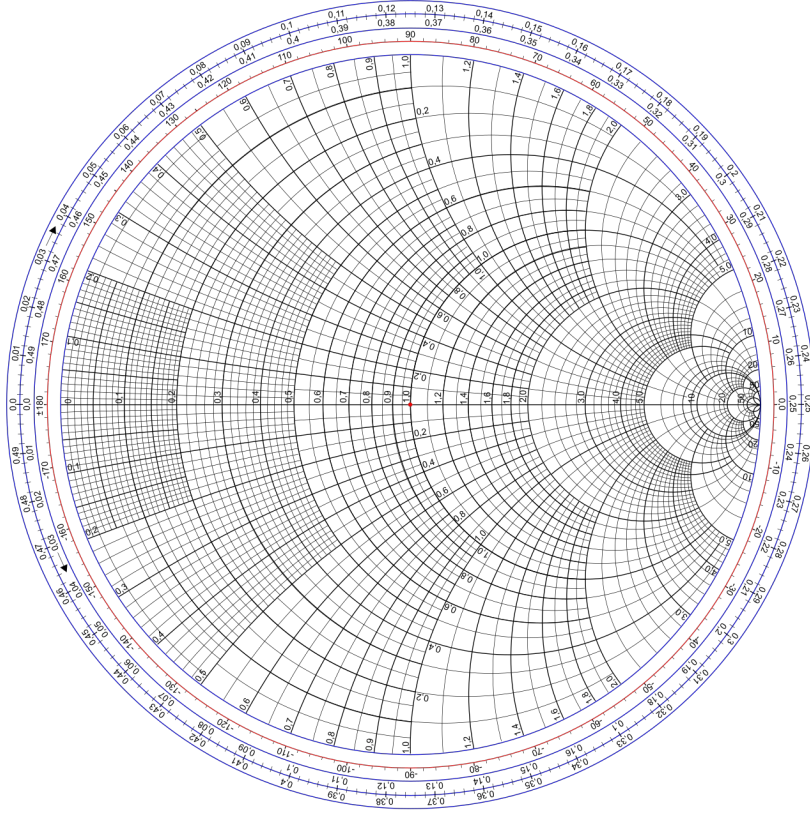
Admittanz als komplexe Zahl

Auch die Admittanz kann als komplexe Zahl dargestellt werden:

$$Y = G + B_L + B_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$



Smith Chart

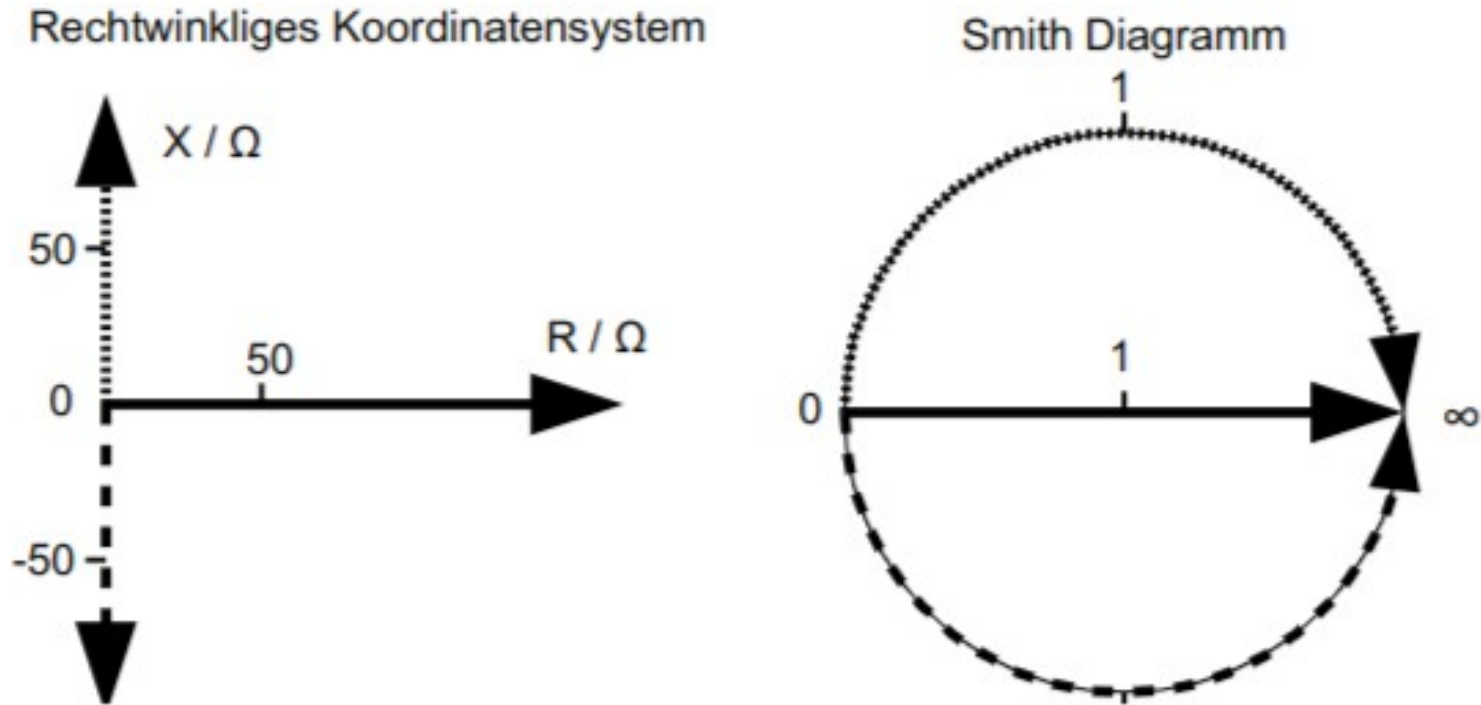


Verändert man die Darstellung der komplexen Zahlenebene etwas, dann erhält man ein Smith Chart.

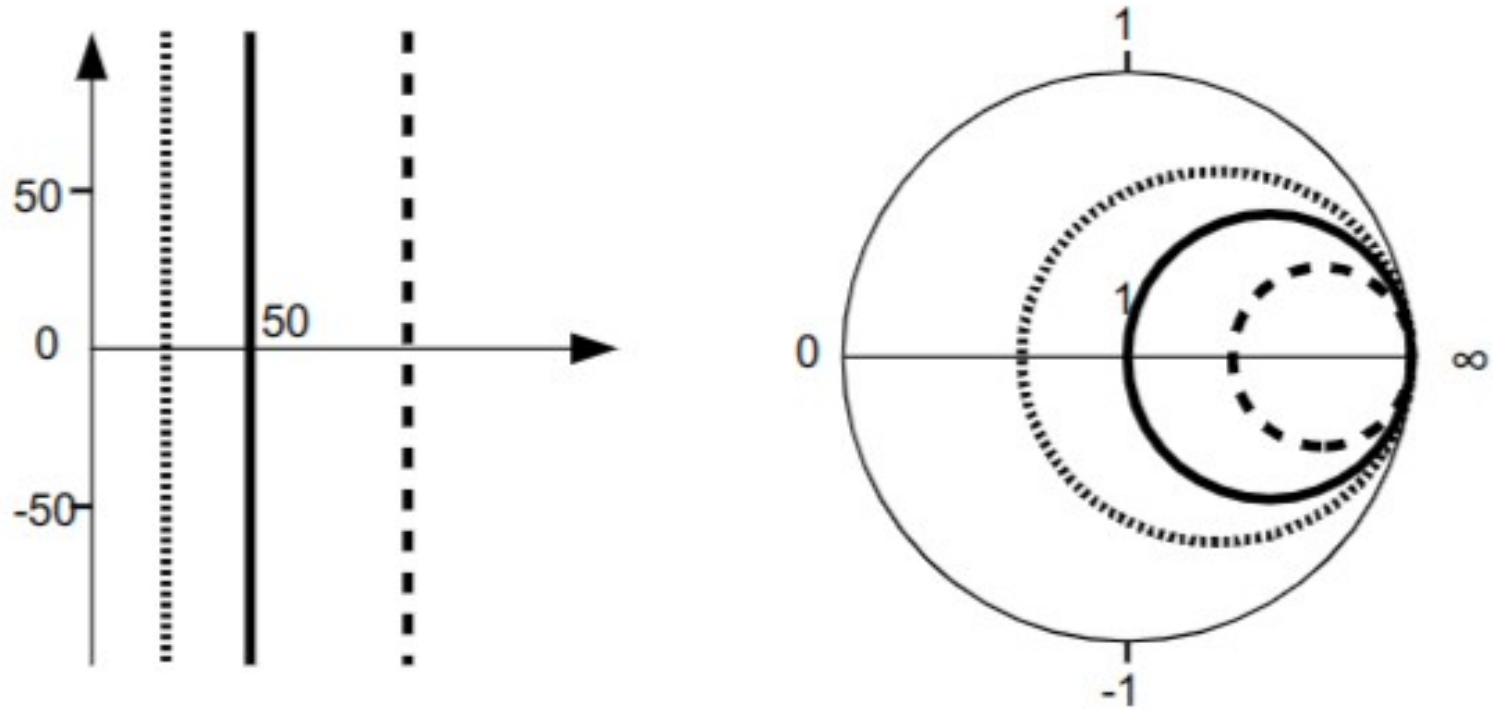
Beim Smith Chart ist die rechte Hälfte der komplexen Zahlenebene so verbogen, dass die vertikale Achse (von minus bis plus Unendlich!) einen Kreis ergibt.

Ausserdem ist sie auf eine Bezugsgrösse normiert. Die Bezugsgrösse ist meistens 50Ω ; und normiert bedeutet, dass alle Beschriftungen durch diesen Wert dividiert wurden. ■

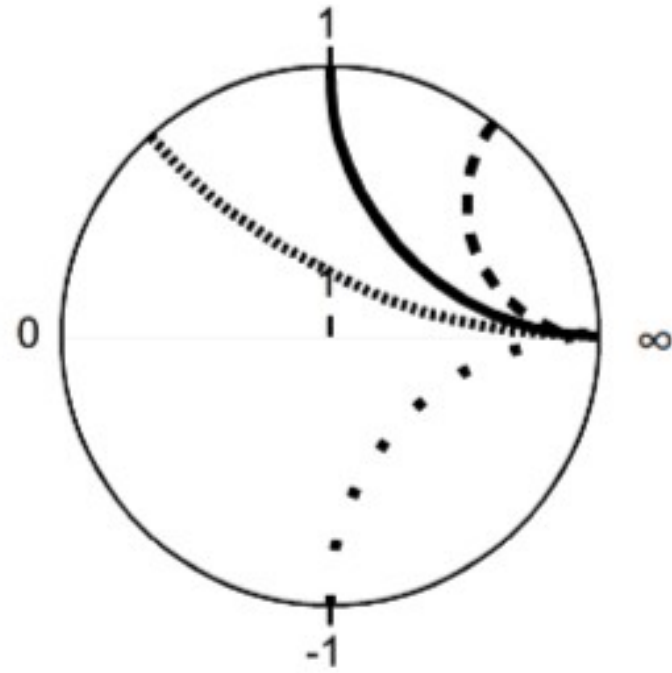
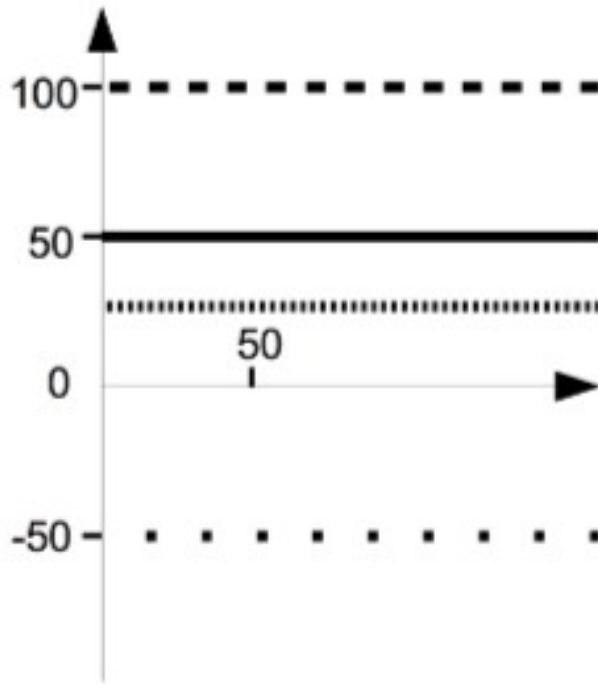
Smith Chart



Smith Chart



Smith Chart



Rechenbeispiel mit Admittanz

Berechnen einer Admittanz aus der Impedanz. Nehmen wir an, wir hätten eine Impedanz von

$$Z = 50\Omega + j \cdot 50\Omega = 50\Omega(1+j)$$

Normiert ist das

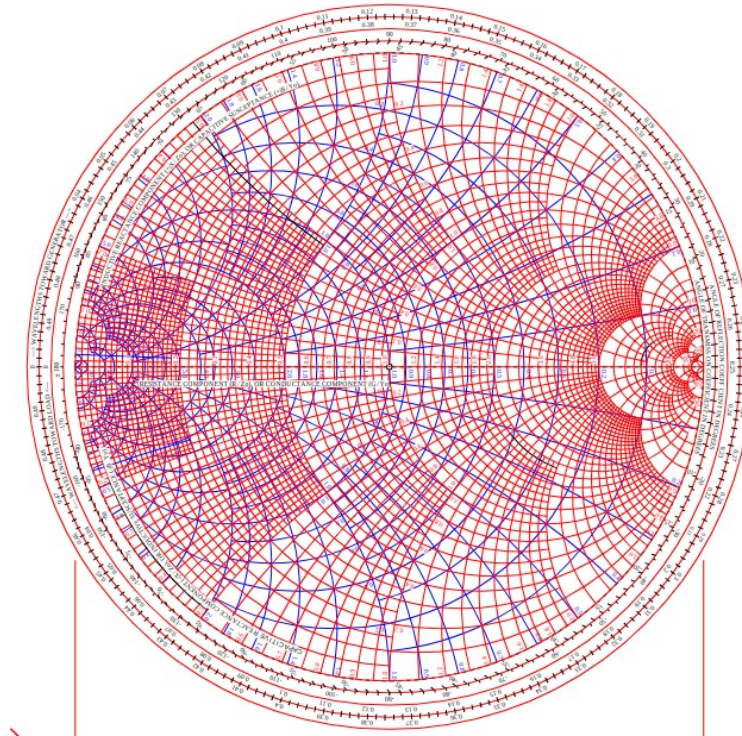
$$Z_{\text{norm}} = 1 + j = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot e^{j0.25\pi}$$

$$Y_{\text{norm}} = (1/\sqrt{2}) \cdot e^{j(-0.25)\pi} = \sqrt{2} \cdot 0.5 \cdot e^{j(-0.25)\pi} = 0.5 - j \cdot 0.5$$

Im Smith Chart erkennt man, dass es sich dabei um eine Spiegelung am Zentrum handelt. ■

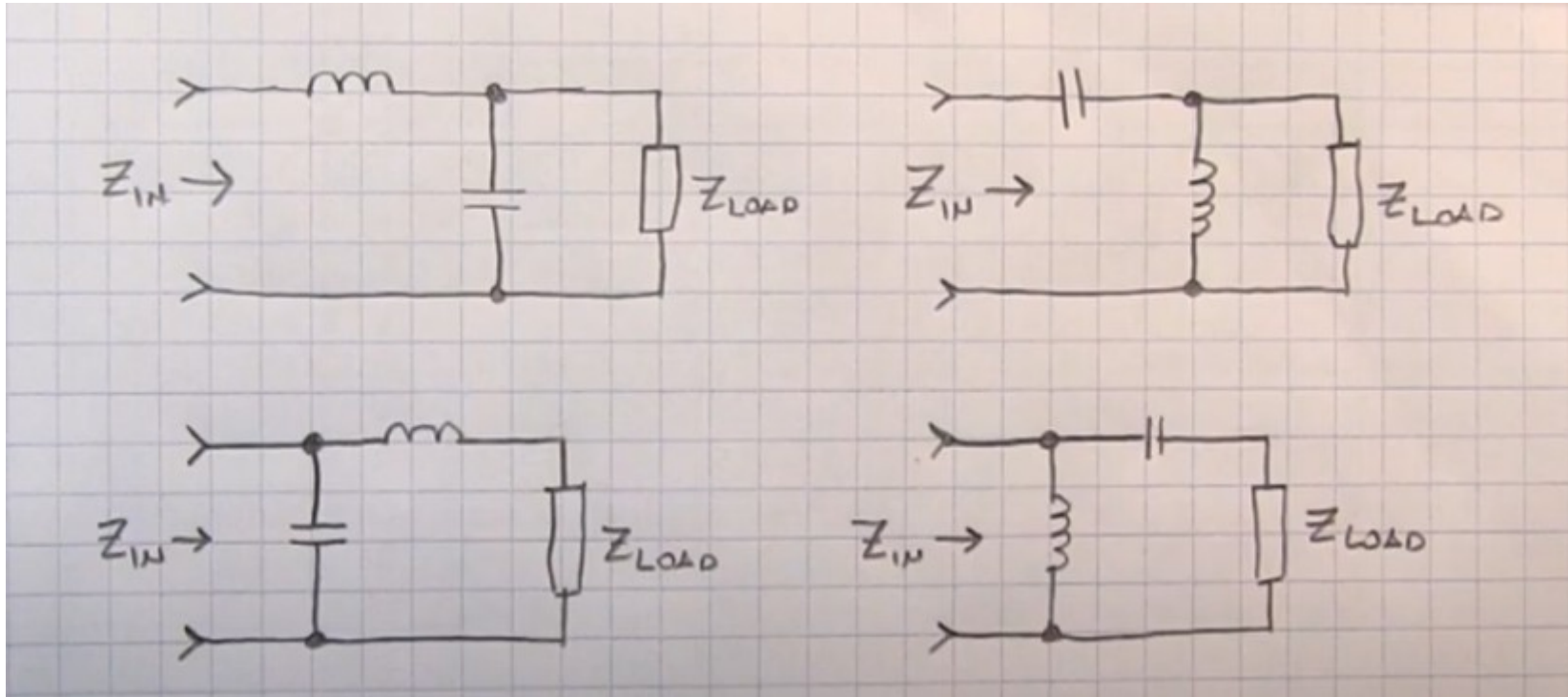
Impedanz vs. Admittanz

Und weil eine Admittanz der am Zentrum punktgespiegelte Punkt ist, kann man das ganze Smith Chart am Zentrum punktspiegeln. Man bekommt somit ein zweifarbiges Smith Chart:

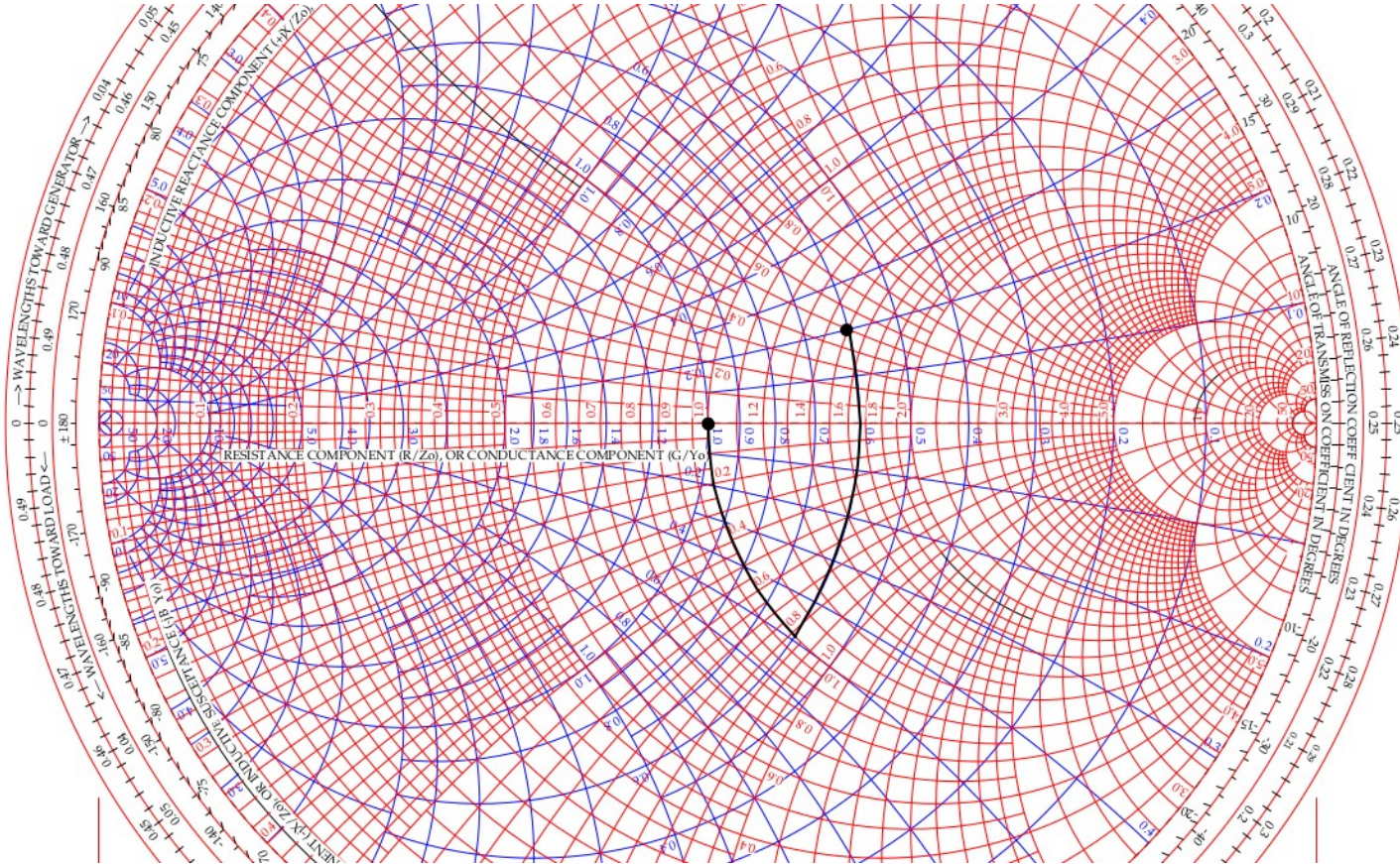


Teil 3

L-Netzwerke aus C und L



Anpassbeispiel



Interpretationsregeln

Rote Linien stehen für Impedanz, also Reihenschaltung.

Blaue Linien stehen für Admittanz, also Parallelschaltung.

Weg nach oben bedeutet Spule.

Weg nach unten bedeutet Kondensator. ■

Anpassbeispiel (Beschreibung)

Der erste Teilweg läuft an den **blauen** Linien entlang nach **unten** und ist etwa 0.68 lang. Das entspricht einer **Parallelschaltung** eines **Kondensators**.

Es gilt $X = \Delta X \cdot 50\Omega$ oder $B = \Delta B \cdot 20mS$, hier also $B_c = 0.68 \cdot 20mS = 13.6 mS$

Mit der Formel

$$|B_c| = \omega C \text{ mit } \omega = 2\pi f$$

kann man die Kapazität für eine gegebene Frequenz berechnen. ■

Anpassbeispiel (Beschreibung)

Der zweite Teilweg läuft an den roten Linien entlang nach oben und ist etwa 0.82 lang. Das entspricht einer Reihenschaltung einer Spule.

Es gilt $X = \Delta X \cdot 50\Omega$ oder $B = \Delta B \cdot 20mS$, hier also $X_L = 0.82 \cdot 50\Omega = 41\Omega$.

Mit der Formel

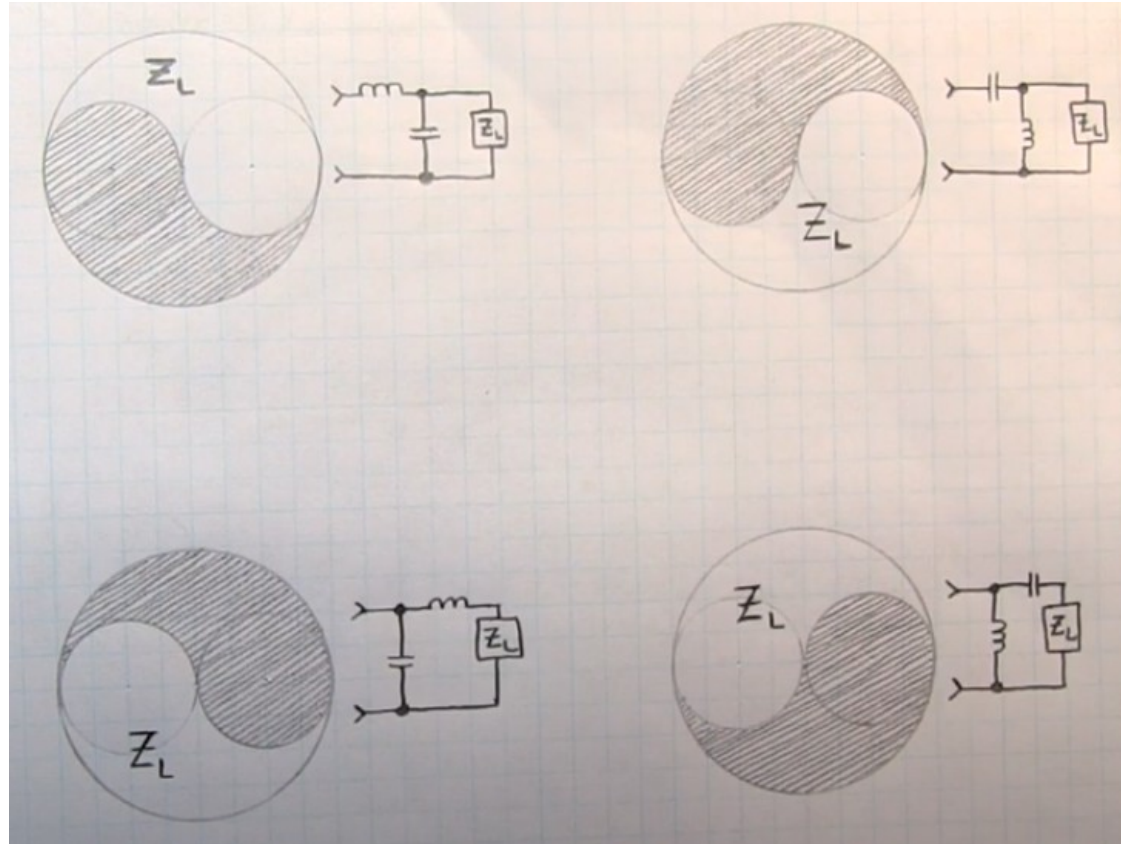
$$|X_L| = \omega L \text{ mit } \omega = 2\pi f$$

kann man die Induktivität für eine gegebene Frequenz berechnen. ■

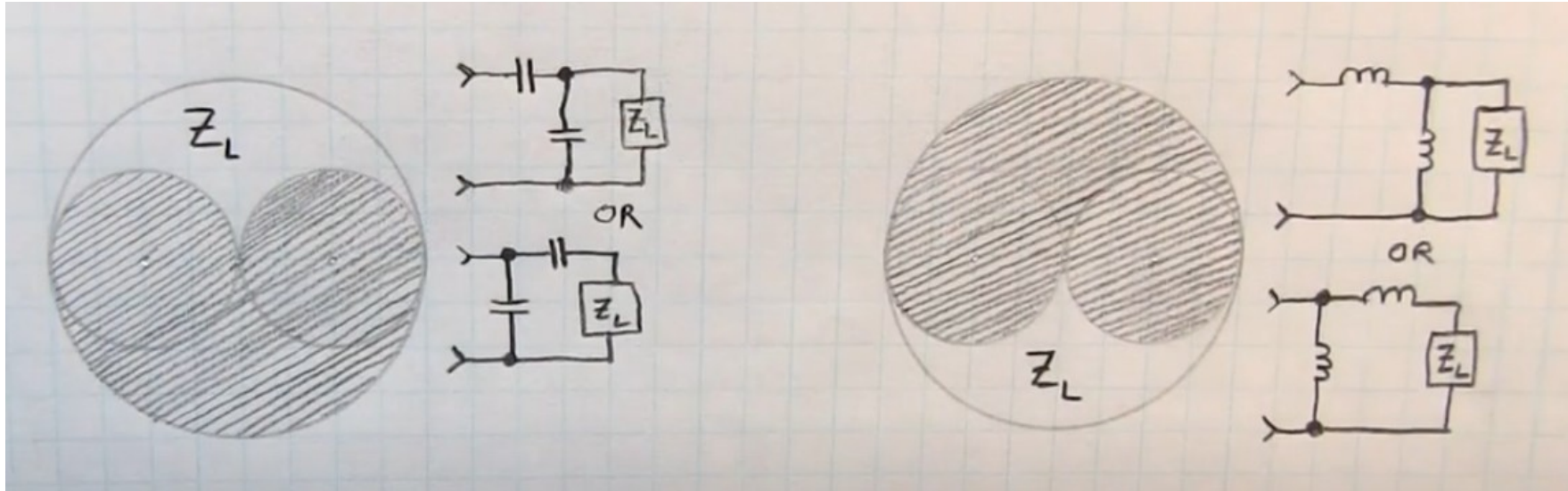
Anpassbeispiel (numerischer Beweis)

	real	imaginär		Betrag	Winkel
Z_{ant}	80.00000	25.00000	▶	83.81527	0.30288
				▼	▼
Y_{ant}	0.01139	-0.00356	◀	0.01193	-0.30288
Y_{C}	0.00000	0.01360			
	▼	▼			
$Y_{\text{ant+C}}$	0.01139	0.01004	▶	0.01518	0.72264
				▼	▼
$Z_{\text{ant+C}}$	49.40272	-43.56085	◀	65.86483	-0.72264
X_{L}	0.00000	41.00000			
Z_{ges}	49.40272	-2.56085	▶	49.46905	-0.05179

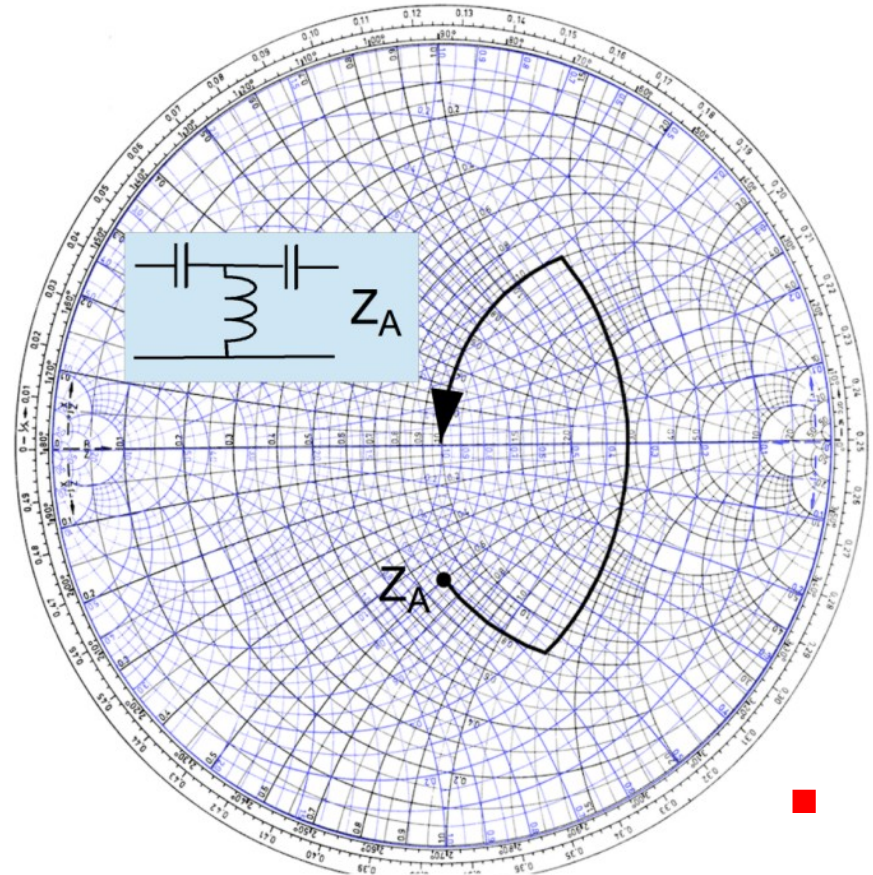
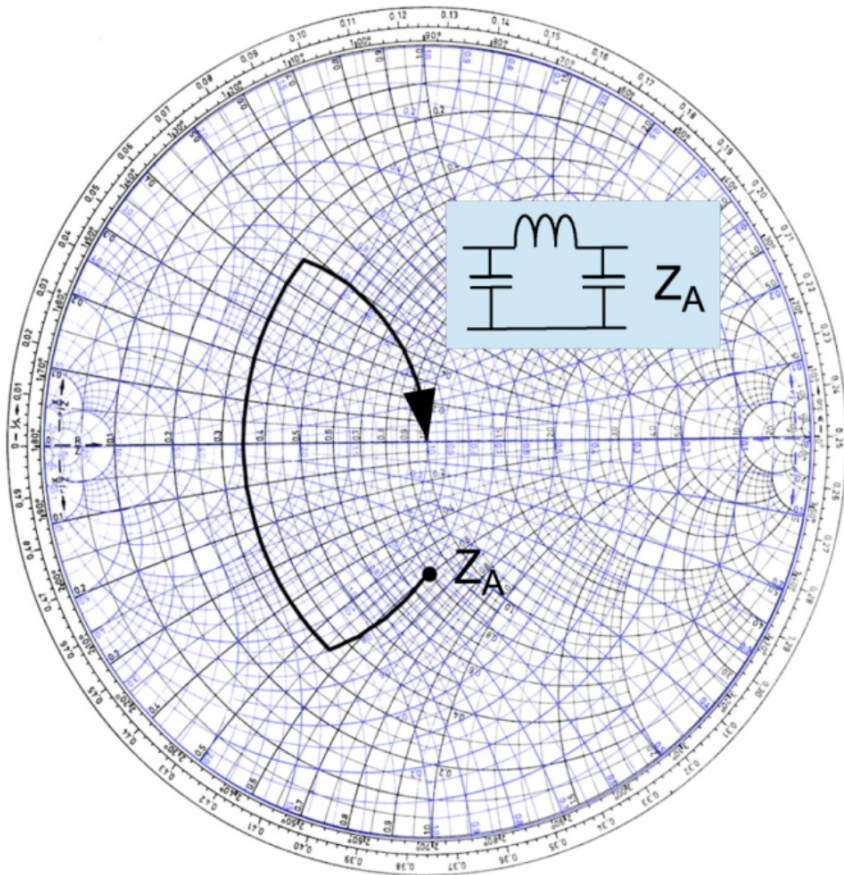
Anpassbereiche 1



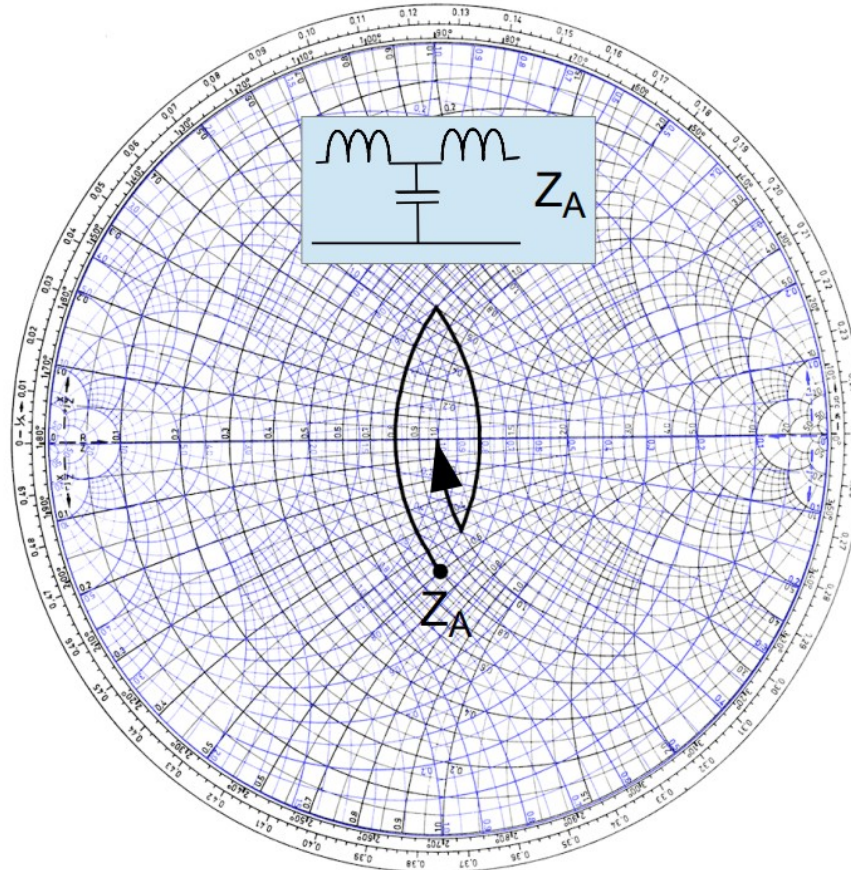
Anpassbereiche 2



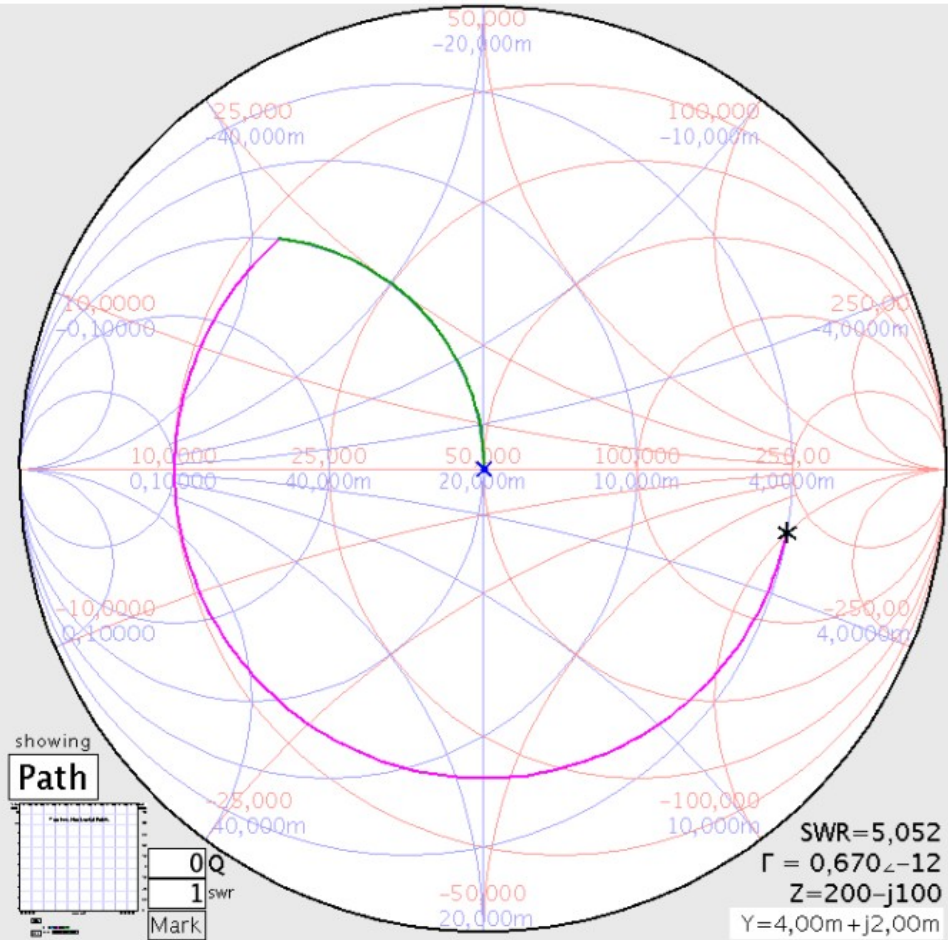
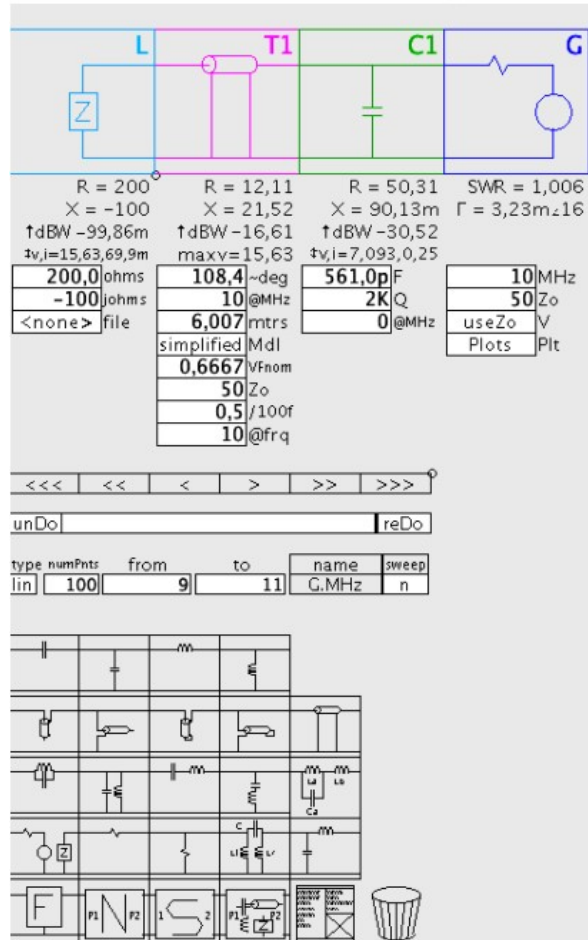
Anpassung mit 3 Elementen (1)



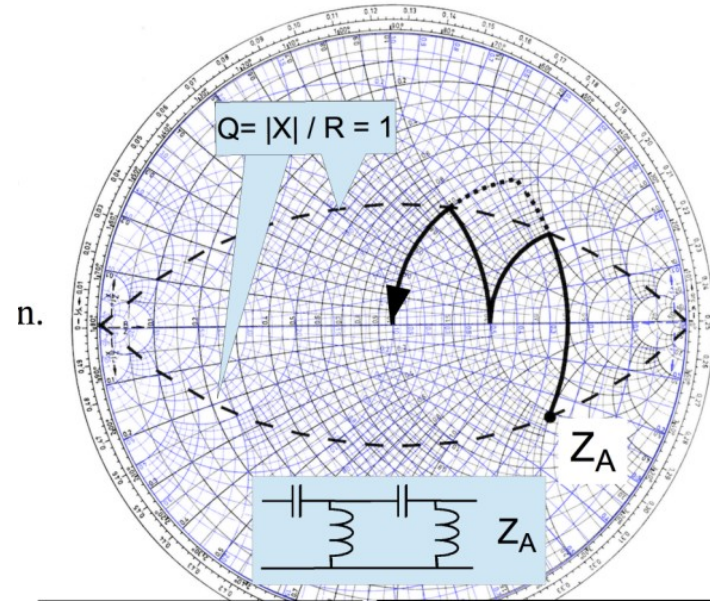
Anpassung mit 3 Elementen (2)



Anpassung mit Zuleitung



Zusammenhang mit der Güte Q

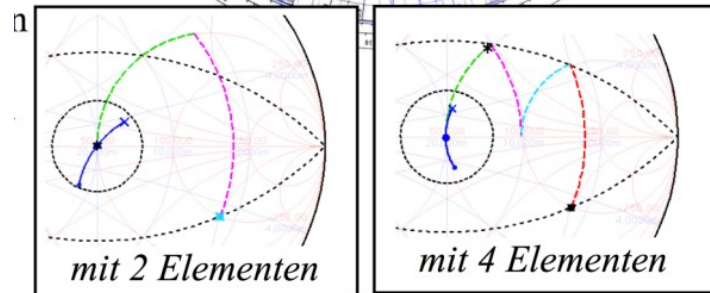


Je grösser die Blindwiderstände im Verhältnis zu den Wirkwiderständen ist, desto grösser ist die Frequenzabhängigkeit – und damit die Schmalbandigkeit.

Hier als «Linse» dargestellt ist $Q = |X|/R = 1$.

Je dünner die «Linse», desto breitbandiger.

Hier im Beispiel ist die Schaltung mit 4 Elementen breitbandiger als diejenige mit 2 Elementen. ■



Ende